

Tuomas Salonen

# **BETONIRAKENTEISTEN VÄLIPOHJIEN VÄRÄHTELY TEOLLISUUS- RAKENNUKSISSA**

Rakennetun ympäristön tiedekunta  
Diplomityö  
Syyskuu 2019

## TIIVISTELMÄ

**TUOMAS SALONEN:** Betonirakenteisten välipohjien värähtely teollisuusrakennuksissa

Tampereen yliopisto

Diplomityö, 84 sivua, 3 liitesivua

Syyskuu 2019

Rakennustekniikan diplomi-insinöörin tutkinto-ohjelma

Pääaine: Rakennesuunnittelu

Tarkastajat: Professori Reijo Kouhia, Associate professor (tenure track) Sami Pajunen

Avainsanat: dynamiikka, värähtely, teollisuusrakennus, välipohja, värähtelymitoitus, betonirakenteet

Värähtely voi aiheuttaa rakenteille merkittävän mitoitustilanteen etenkin teollisuusrakennuksissa, joissa tuotannon koneet ja laitteet aikaansaavat huomattavia dynaamisia kuormituksia. Yleisesti ne pyritään sijoittamaan omille koneperustuksilleen, josta dynaamiset kuormat johdetaan suoraan maapohjalle tai paaluperustukselle. Kuitenkin teollisuusrakennuksissa on joissain tapauksissa välttämätöntä tai haluttua sijoittaa koneita ja asennuksia suoraan liittyvien välipohjarakenteiden varaan johtuen esimerkiksi valmistettavan tuotteen tuotantoprosessista tai rakennuksen tilanahtaudesta. Tällaisessa tapauksessa on suoritettava välipohjan dynaaminen tarkastelu.

Betonirakenteiden yleiseurooppalainen suunnitteluohje EN 1992-1-1 ei käsittele betonirakenteiden värähtelyn käyttörajatilamitoitusta, joten tässä työssä tarjotaan lukijalle siitä yleiskatsaus teollisuuden välipohjarakenteiden osalta. Työssä esitetään peruseriaatteet yksinkertaisten teollisuuskoneiden aiheuttamien dynaamisten kuormien määrittämiseen, värähtelytarkastelun suorittamiseen sekä värähtelyn raja-arvojen asettamiseen.

Rakenteiden värähtelyherkkyyttä arvioitaessa tärkein suure on ominaistajuus, joka kertoo, millä taajuudella rakenne helpoiten värähtelee. Tässä diplomityössä esiteltiin ominaistajuuksien laskentaa kirjallisuudessa esitettyjen likimenetelmien sekä Autodesk Robot Structural Analysis- tietokoneohjelman avulla. Tulosten välillä suoritettiin vertailu ja arvioitiin menetelmien yhteensopivuutta. Vertailun perusteella todettiin, että molemmat menetelmät antoivat toisiaan vastaavia tuloksia erityisesti rakenteiden alimmille ominaistajuuksille värähtelyherkempien tutkittujen rakenteiden tapauksessa. Niille tapauksille, missä alin ominaistajuus oli korkea, tuloksissa havaittiin poikkeamia. Lisäksi korkeammilla ominaismuodoilla alkoi esiintyä eroa, kun niitä vastaavat taajuudet olivat korkeita.

Tavoitteena oli myös tutkia kahden yleisimmän paikallavaletun välipohjarakenteen soveltuvuutta teollisuusrakennusten välipohjaksi asettamalla niille pyörivän koneen aiheuttama heräte ja laskemalla tietokoneavusteisesti rakenteiden vaste mainitulla ohjelmalla. Soveltuvuutta havainnollistettiin muuttamalla rakenteiden ominaisuuksia ja selvittämällä vaste jokaiselle tutkitulle tapaukselle. Tuloksena havaittiin, että monet pääasiassa staattiselle kuormitustilanteelle suunnittelut tavalliset välipohjat (rakennepaksuus 200-250 mm) saattavat olla käyttökelvottomia, kun käyttökelpoisuutta arvioidaan värähtelyn sallittujen amplitudien kautta. Lopputulosten perusteella työ antaa yleiskuvan siitä, miten muokata rakennetta, mikäli värähtely aiheuttaa ongelmia.

## ABSTRACT

**TUOMAS SALONEN:** Vibration of concrete floors in industrial buildings

University of Tampere

Master of Science Thesis, 84 pages, 3 Appendix pages

September 2019

Master's Degree Programme in Civil Engineering

Major: Structural Design

Examiners: Professor Reijo Kouhia, Associate professor (tenure track) Sami Pa-junen

**Keywords:** dynamics, vibration, intermediate floors, industrial buildings, vibration design, concrete structures

Vibration can cause a significant structural design situation in service limit state especially in industrial buildings, where machines and equipment of production line generate remarkable dynamic forces. In general, the machines and equipment are supported by separate machine foundations that transmit the dynamic forces directly to compact soil or pile foundation. However, in industrial buildings it is sometimes desirable or necessary to mount machines directly on adjoining floors, for example due to production process of manufactured product or lack of space. In these cases, the structural dynamic analysis of floor structure becomes necessary.

European standard for design of concrete structures EN 1992-1-1 does not consider the service limit state set by vibration. Therefore, this thesis offers a general overview about vibration design in respect of floor structures of industrial buildings. It presents basic principles for defining dynamic forces caused by simple industrial machines of different kind, describes how to execute vibration design, and presents criteria to evaluate vibration severity.

When evaluating the sensitivity of the structure to vibrate, it is crucial to know its natural frequency or frequencies, which tell in which frequencies the structure is most likely to vibrate. In this thesis, the calculation of natural frequencies for floors was considered through two methods: approximate formulas presented in literature and Autodesk Robot Structural Analysis 2016- computer program. The compatibility of these methods was evaluated. The outcome was that the results with both methods were analogous especially for calculating the lowest natural frequencies for the structures which were most sensitive for vibration. For those of the structures which had very high natural frequencies, there were significant deviations in results. In addition to this, there were remarkable deviations with higher mode shapes when corresponding frequencies were high.

Another objective of this thesis was also to examine suitability of two most common cast-in-place concrete floor structures in industrial buildings. A constant dynamic loading from rotating machine was implemented to the studied structures and the dynamic response was computed by means of the computer program mentioned above. The properties of structures were altered, and the response was computed in every case. It was discovered that typical intermediate floor slabs (200-250 mm of structural thickness) designed mainly against static loads could be unsuitable when considering permissible amplitudes of vibration. The results also gave a general overview to the reader how to modify structures in case of excessive vibration.

## ALKUSANAT

Tämä diplomityö on tehty Pöyry Finland Oy:lle ja siinä on tutkittu teollisuusrakennuksissa esiintyvien välipohjarakenteiden värähtelyä sekä esitelty välipohjan värähtelytarkastelun tekemistä teollisuuskohdeissa. Pöyryn puolelta ohjaajanani on toiminut Nicola Salvetti, jonka asiantuntemus rakenteiden käytännön värähtelymitoituksesta on edesauttanut suuresti työn läpivientiä. Tampereen (teknillisen) yliopiston puolelta työni ohjauksesta ovat vastanneet Associate Professor Sami Pajunen sekä professori Reijo Kouhia, jota tahdon kiittää täsmentävistä ja korjaavista kommentteista liittyen työn laskentaosuuteen.

Rakenteiden värähtely diplomityön aiheena on ollut minulle haastava aikaisemman kokemuspohjan puuttuessa ja siihen syvemmin paneutuessa olen vielä tarkemmin huomannut aihealueen laajuuden. Työn tekeminen onkin ollut hyvin kaksijakoinen prosessi. Toisaalta se on edennyt omalla painollaan ja rehellisesti sanottuna epäusko on toisaalta meinannut viedä monesti voiton. Onneksi tähänastisen elämäni varrelta olen sattunut löytämään mahtavia ihmisiä ympärilleni, joiden avulla päätä on ollut mahdollista selvittää muistakin asioista. Siispä haluan kiittää Tiinaa, perhettäni ja ystäviäni, jotka tekevät elämästä opiskelujen ja työn ulkopuolella elämisen arvoista, ja joiden tuki on aina korvaamatonta.

Nyt, kun opiskelut tulevat päätökseen, on mahdollista tehdä oma virallinen ”seuraava askel - uusi sivu elämässä” -muotoinen katsaus tulevaisuuteen. Odotan suurella mielenkiinnolla työelämän haasteita ja toivottavasti saan myös käytännössä hyödynnettyä tämän työn tekemisessä karttunutta tietoa. Yksi elämänvaihe on nyt takana ja seuraava edessä, mitä sitten tuokin tullessaan.

*” Ich denke niemals an die Zukunft. Sie kommt früh genug.”*

*-Albert Einstein*

Tampereella, 13.9.2019

Tuomas Salonen

# SISÄLLYSLUETTELO

1.	JOHDANTO .....	1
1.1	Työn tausta .....	1
1.2	Tutkimusongelma.....	2
1.3	Työn tavoitteet.....	3
1.4	Työn rajaus .....	4
1.5	Tutkimusmenetelmät ja tuotokset .....	4
2.	VÄRÄHTELYN TEORIAA.....	6
2.1	Värähtely ilmiönä.....	6
2.2	Yhden vapausasteen värähtely .....	6
2.2.1	Vaimentamaton ominaisvärähtely.....	7
2.2.2	Vaimennettu ominaisvärähtely .....	8
2.2.3	Harmoninen pakkovärähtely .....	11
2.2.4	Resonanssi.....	13
2.3	Laattarakenteen värähtely .....	16
2.3.1	Suorakaidelaatan vapaa värähtely .....	16
2.3.2	Suorakaidelaatan pakkovärähtely .....	19
3.	TEOLLISUUSRAKENNUSTEN VÄLIPOHJAT .....	22
3.1	Yleistä.....	22
3.2	Tyypilliset teollisuusrakennusten betoniväli­pohjat.....	23
3.2.1	Vakiopak­suinen teräs­betonilaatta .....	23
3.2.2	Alapuolelta palkeilla jäykistetty laatta.....	24
3.3	Betoniväli­pohjan vaimennusominaisuudet .....	26
4.	VÄRÄHTELY TEOLLISUUSRAKENNUKSISSA.....	29
4.1	Värähtelyn lähteet .....	29
4.1.1	Pyörivät koneet .....	29
4.1.2	Edestakaisin liikkuvat koneet.....	32
4.1.3	Iskevät koneet .....	34
4.2	Teollisuusväli­pohjien värähtelysuunnittelu.....	36
4.2.1	Rakenteen viritys.....	37
4.2.2	Dynaamisen vasteen laskenta.....	38
4.3	Dynaamisen vasteen raja-arvot .....	39
4.3.1	Betonirakenteille sallittava värähtely.....	39
4.3.2	Ihmisille sallittava värähtely .....	40
4.3.3	Koneille sallittava värähtely.....	43
5.	LAATTOJEN OMINAISTAAJUUKSIEN LASKENTA .....	46
5.1	Likimenetelmät.....	47
5.1.1	Isotrooppinen laatta.....	47
5.1.2	Alapuolelta palkeilla jäykistetty laatta.....	48
5.2	Ominaistaajuuksien laskenta .....	49
5.2.1	Vapaasti tuetut laatat .....	50

5.2.2	Jäykästi tuetut laatat .....	54
5.2.3	Muut tuentatapaukset .....	55
5.3	Johtopäätökset .....	56
6.	RAKENTEIDEN VASTE HARMONISEN HERÄTTEEN VAIKUTTAESSA...	58
6.1	Laskentamenetelmä dynaamiselle vasteelle.....	58
6.2	Tutkittava värähtelysysteemi.....	59
6.3	Vasteen laskenta.....	62
6.3.1	Lisäkuorman vaikutus vasteeseen .....	62
6.3.2	Laatan paksuuden vaikutus vasteeseen .....	69
7.	YHTEENVETO JA PÄÄTELMÄT .....	76
	LÄHTEET .....	82

## LIITE 1: OMINAISTAAJUUKSET MUILLE REUNAEHDOILLE

## LYHENTEET JA MERKINNÄT

ACI	engl. American Concrete Institute, Yhdysvaltojen betonitutkimuskeskus
FEM	engl. Finite element method, elementtimenetelmä
FRF	engl. Frequency response function, taajuusvastefunktio
ISO	engl. International Organization for Standardization, Kansainvälinen standardisoimisyhdistys
Robot	Autodesk Robot Structural Analysis Professional 2016
SFS	Suomen standardisoimisliitto SFS ry.
VTT	Valtion teknillinen tutkimuskeskus

### Dynamiikan teoria:

$a$	laatan leveys x-suunnassa
$\hat{A}, W$	siirtymäamplitudi
$b$	laatan leveys y-suunnassa
$c$	viskoosivaimennus
$c_k$	kriittinen vaimennuskerroin
$\mathbf{C}$	vaimennusmatriisi
$D_x$	ortotrooppisen laatan taivutusjäykkyys suunnassa x
$D_y$	ortotrooppisen laatan taivutusjäykkyys suunnassa y
$f$	ominaistaajuus
$F$	voima
$\mathbf{F}$	pakkovoimavektori
$\hat{F}$	herätevoiman amplitudi
$h$	laatan paksuus
$i$	x-suuntaisen sinimuotoisen värähtelyn puolialtojen lukumäärä
$j$	y-suuntaisen sinimuotoisen värähtelyn puolialtojen lukumäärä
$k$	jousen jäykkyys
$K$	laatan taivutusjäykkyys
$\mathbf{K}$	jäykkyysmatriisi
$m$	massa
$\mathbf{M}$	massamatriisi
$q_z$	laatan pintaa vastaan kohtisuora dynaaminen kuormitus
$t$	aika
$T$	ominaisvärähdysaika
$u, x$	siirtymä
$\dot{u}, v$	nopeus
$\ddot{u}, a$	kiihtyvyys
$\mathbf{u}$	siirtymävektori
$\dot{\mathbf{u}}$	nopeusvektori
$\ddot{\mathbf{u}}$	kiihtyvyysvektori
$u_0$	alkusiirtymä
$u_{st}$	siirtymä staattisessa kuormitustilanteessa
$v_0$	alkunopeus
$V, V_s$	vahvistuskerroin
$V_d$	vaimennetun systeemin vahvistuskerroin
$V_{max}$	maksimivahvistuskerroin

$w$	laatan taipuma
$x_z, \hat{A}$	siirtymäamplitudi
$\Delta$	Laplace-operaattori
$\zeta$	materiaalin suhteellinen vaimennuskerroin
$\phi$	vapaan värähtelyn amplitudivektori
$\varphi$	värähtelyn vaihekulma
$\omega$	ominaiskulmataajuus
$\omega_d$	alikriittisesti vaimennetun systeemin ominaiskulmataajuus
$\Omega$	herätteen kulmataajuus

Välipohjien ja herätteiden ominaisuudet:

$a$	välipohjalaatan leveys
$a_l$	alapuolelta palkeilla jäykistetyin laatan palkkien jako
$b$	välipohjalaatan jänneväli
$D_k$	ortotrooppisen laatan vääntöjäykkyys
$D_x$	ortotrooppisen laatan taivutusjäykkyys x-suunnassa
$D_y$	ortotrooppisen laatan taivutusjäykkyys y-suunnassa
$D_{xy}$	ortotrooppisen laatan tehollinen vääntöjäykkyys
$e_m$	pyörivän massan epäkeskisyyys
$E$	kimmomoduuli
$F_s$	hitausvoima, kitkavoima
$F_x$	männän liikkeen suuntainen dynaaminen kuormitus
$F_y$	männän liikettä vastaan kohtisuora dynaaminen kuormitus
$h_0$	iskevän koneen iskukappaleen pudotuskorkeus
$h_l$	ortotrooppisen laatan yläosan korkeus
$H$	ortotrooppisen laatan kokonaiskorkeus
$I_z$	T- muotoisen poikkileikkauksen neliömomentti laipan leveydellä $a_l$
$l$	mäntäkoneen kiertokangen pituus
$l_m$	yhteisellä akselilla pyörivien massojen painopisteiden etäisyys
$m_r, m_{rot}$	pyörivän kappaleen massa
$m_{rec}$	edestakaisin liikkuva massa
$M$	epätasapainomomentti
$M_h$	iskevän koneen massa
$M_r$	iskevän koneen iskukappaleen massa
$r$	mäntäkoneen kammen pituus
$t_l$	jäykistetyin laatan jäykistepalkin leveys
$v_h$	iskukappaleen jälkivaikutusnopeus
$v_r$	iskukappaleen vaikutusnopeus
$x_p$	männän siirtymä
$\ddot{x}_p$	männän kiihtyvyys
$\alpha_h$	iskevän koneen iskukappaleen palautusvakio
$\gamma$	tilavuuspaino
$\delta$	logaritminen dekrementti
$\nu$	Poissonin luku
$\omega_0$	koneen vakioarvoinen ominaiskulmataajuus
$\varphi_F$	pyörimisliikkeen vaihekulma



# 1. JOHDANTO

## 1.1 Työn tausta

Suomessa rakennesuunnittelu toteutetaan pääasiassa yhteiseurooppalaisten standardien eli eurokoodien mukaisesti. Betonirakenteiden suunnittelua käsittelee eurokoodi EN 1992-1-1 [1], jossa esitetään rakenteiden mitoitusperiaatteet sisältäen betonirakenteiden murto- ja käyttörajatilojen tarkastelun. Näiden mitoitusperiaatteiden avulla tulee osoittaa, ettei mitään rajatilaa ylitetä, kun kuormille, materiaaleille ja mittatiedoille käytetään eurokoodien mukaisia mitoitusarvoja. Käyttörajatiloiksi luokitellaan rakenteen ja rakennuksen toimintaan, ihmisten mukavuuteen sekä rakennuksen ulkonäköön liittyvät rajatilat ja niissä tarkastellaan rakenteiden siirtymiä, vaurioita ja *värähtelyjä*.

EN 1992-1-1 antaa ohjeet rakenteiden jännitysten, halkeamaleveyksien ja taipumien rajoittamiseen, mutta värähtelyä se ei käsittele tarkemmin [1]. Kuitenkin eurokoodeissa mainitaan, että joissain tapauksissa värähtelyn tarkasteleminen voi olla olennaista ja eurokoodeissa edellytetäänkin yleisesti, että tarkastelut suoritetaan kaikille merkittävälle mitoitusilanteille ja kuormitustapauksille [2, s.56]. Teollisuuskohteissa juuri värähtely voi osoittautua merkittäväksi käyttörajatilan mitoitusilanteeksi.

Voimakas värähtely saattaa johtaa betonirakenteen vaurioitumiseen, mutta usein sen haitat tulevat ilmi aikaisemmin. Tuotantoprosessien koneet ja laitteet sekä niiden käyttäjät häiriintyvät huomattavasti pienemmästä värähtelystä kuin mitä rakenteiden vaurioitumiseen tai murtumiseen vaaditaan. Teollisuusrakennuksissa voimakas värähtely voi jopa estää kokonaan uuden teollisen tuotannon aloittamisen, kun koneiden oikeaa toimintaa ei pystytä takaamaan tai tuotannon laatuvaatimuksia varmistamaan värähtelyn vuoksi [3, s.45]. Värähtely on huomioitava rakennuksen suunnitteluprosessin alussa, sillä valmiissa rakenteissa ja rakennuksissa virheet ovat vaikeammin ja kalliimmin korjattavissa [4]. Tästä syystä teollisuuden korjaus- ja muutoskohteissa rakenteita joudutaan värähtelyn vuoksi vahvistamaan tai muuttamaan [3].

Värähtelyn aiheuttamiin ongelmiin on jouduttu kiinnittämään lisähuomiota teollisuusrakentamisessa muutamasta pääsyystä. Betoniteknologian kehittyessä ja tämän myötä materiaalilujuuksien kasvaessa betonirakenteiset välipohjat on voitu suunnitella pidemmille jänneväleille sekä kevyemmiksi ja hoikemmiksi. Keventyneet rakenteet ovat alttiimpia värähtelylle, sillä yleisesti tiedetään, että rakenteen värähtelykäyttäytymiseen vaikuttavat sen ominaisuuksista eniten massa ja jäykkyys [5]. Lisäksi teollisuuden koneet ja laitteet ovat yhä tehokkaampia niiden käyntinopeudet suurempia, mikä on kasvattanut

dynaamisia kuormituksia. Nykyaajan teollisen tuotannon laatuvaatimukset ovat myös tiukempia, joten koneiden toimintaan perustuvat värähtelyn raja-arvot ovat tulleet tiukemmiksi. [3]

Vaikka pääperiaate on, ettei välipohjille sijoiteta kuin vähäisiä dynaamisia kuormituksia tuottavia koneita ja laitteita, teollisuusrakentamisessa etenkin muutostöiden yhteydessä lopputulos on hyvin tapauskohtainen. Esimerkiksi tilanahtaus saattaa vaatia jonkin koneen sijoittamista välipohjalle. Suuret teollisuuskoneet perustetaan normaalisti omille massiivisille laiteperustuksilleen, jotka jakavat aiheutuvan dynaamisen kuormituksen tukevalle maaperälle tai perustamiseen käytetyille paaluille [6, s.230]. Joissain tapauksissa valmistettavan tuotteen tuotantoprosessi edellyttää runsaasti tilaa koneen alapuolelle, jolloin sen perustus on jalustamainen, koostuen pohjalaatasta, pilareista, palkeista sekä mahdollisesti yläpuolisesta laatasta [7, s.331]. Esimerkiksi tällaisessa tilanteessa koneen käyttö- ja kunnossapitotoimet edellyttävät välipohjien rakentamista, jolloin myös niiden värähtelytarkastelu voi tulla kysymykseen. Koneiden vaatima suuri vapaa tila johtaa myös pitkiin jänneväleihin, mikä osaltaan lisää rakenteiden värähtelyherkkyyttä. [8]

## 1.2 Tutkimusongelma

Tämän diplomityön tilaaja harjoittaa rakennesuunnittelua monissa projekteissaan teollisuusympäristössä esimerkiksi paperi- ja selluteollisuuden parissa. Näissä kohteissa värähtelyn huomioiminen rakennesuunnittelussa tulee usein välttämättömäksi. Värähtelymitoitus on varsinaista teräsbetonirakenteen mitoitusta haastavampaa, prosessi vie enemmän aikaa ja siihen liittyy huomattavaa epävarmuutta, sillä värähtely on ilmiönä teoreettisesti vaikeammin hallittava ja monimutkaisempi kuin staattinen mitoitus tilanne [9, s.8]. Kun tähän lisätään eurokoodin suunnitteluohjeiden puuttuminen, on värähtelymitoitus voinut joissain tilanteissa aiheuttaa haasteita. Lisäksi diplomityön tilaajan käytännön kokemus on osoittanut, että yhä vähenevässä määrin konetoimittajat ja -valmistajat toimittavat rakennesuunnittelijan käytettäväksi tietoja koneen aiheuttamista dynaamisista kuormista, jolloin suunnittelijan olisi itse kyettävä niitä arvioimaan. Tekijän omaan kokemukseen pohjautuen ei rakennustekniikan yliopisto-opetuksessa keskitytä rakenteiden värähtelyanalyysiin, joten suunnittelijoiden tiedot teollisuuskohteiden värähtelyanalyysiin saattavat olla puutteellisia ja osaaminen syntyikin vain työssä oppimisen kautta.

Koneperustuksien suunnitteluun löytyy kirjallisuudesta useita ohjeita. Kuitenkin värähtelylle altistuvien välipohjien suunnitteluohjeet ovat harvassa, vaikka joskus koneita joudutaan sijoittamaan niiden varaan. Välipohjien värähtelystä on Tampereen yliopistossa ja sen edeltäjissä tehty aikaisemmin ainakin kaksi diplomityötä, joista toinen käsittelee kevyiden [10] ja toinen massiivisten välipohjien värähtelyä [11]. Näissä molemmissa keskitytään kuitenkin vain asuin- ja toimistorakennusten välipohjarakenteisiin, joissa värähtelyn aiheuttajina ovat ihmiset ja liikenne. Sama pätee esimerkiksi VTT:n julkaisuihin, esimerkkinä Tiedote 2124: Lattioiden värähtelyt [12], joka käsittelee kattavasti lattioiden värähtelysuunnittelu asuinrakennuksissa. Se ei sovellu suoraan teollisuuskohteisiin, sillä

värähtelyn aiheuttajat ja raja-arvot määritetään yleensä teollisuudessa eri tavalla kuin asuinkohteissa. Mainitut tutkimukset eivät myöskään varsinaisesti keskity pelkästään betonirakenteisiin.

### 1.3 Työn tavoitteet

Koska Eurokoodin mukaisia suunnitteluohjeita betonirakenteiden välipohjien värähtelymitoitukseen ei ole saatavilla, tämän diplomityön tavoitteena on tarjota siihen yleiskatsaus erityisesti teollisuusrakennusten kannalta. Työn tarkoituksena on antaa tietoa siitä, mitä suunnittelijan tarvitsee tietää värähtelystä teollisuusrakennusten teräsbetonisia välipohjarakenteita suunniteltaessa, miten värähtelymitoitusta etenee ja mihin se perustuu. Tämän tavoitteeseen päästään esittelemällä värähtelyn perusteoriaa, rakenteiden värähtelykäyttäytymiseen vaikuttavia ominaisuuksia sekä teollisuudessa esiintyvien dynaamisten kuormien määrittäystä ja rakenteille sallittavan värähtelyn mitoituskriteereitä kirjallisuudesta löytyvään tietoon perustuen. Työssä käytettävät mitoitusmenetelmät ja -kriteerit pohjautuvat lisäksi osin diplomityön tilaajan suunnittelukäytäntöihin.

Tärkeä osa rakenteen värähtelysuunnittelua on sen ominaistajuuden selvittäminen, jolloin saadaan hyvä lähtökohta rakenteen värähtelyherkkyyden arvioimiseen. Rakenteen ominaistajuudella tarkoitetaan sellaista taajuutta, jolla rakenne alkaa helpoimmin värähdellä [4, s.5]. Ominaisuuden suhde dynaamisen kuormituksen taajuuteen yhdessä rakenteen muiden ominaisuuksien kanssa määrittää, kuinka suuri värähtely pääsee syntymään. Erityisesti koneperustusten tapauksessa rakenteen ominaistajuutta ei tulisi suunnitella samalle taajuusalueelle kuin dynaamisen kuorman taajuus [7, s.4]. Koska ominaistajuuden arviointi on laskennallisesti haastavaa useimpien laattarakenteiden osalta, toteutetaan laskenta yleensä tietokoneavusteisesti tai matemaattisesti yksinkertaistetuilla menetelmillä. Tämän työn toisena tavoitteena on esitellä tutkittavien laattarakenteiden ominaistajuuksien määrittämistä sekä tietokoneavusteisesti elementtimenetelmään (FEM, engl. Finite Element Method) pohjautuen että kirjallisuudesta löydettävillä laskentakaavoilla.

Kolmantena tavoitteena on havainnollistaa, millä rakenteen ominaisuuden muutoksella värähtelyä pystytään parhaiten hallitsemaan. Koska rakenteen värähtelykäyttäytyminen riippuu sen ominaisuuksista ja dynaamisen kuorman luonteesta, on vaikeaa, ellei mahdollista, esittää sellaista välipohjarakennetta, jolle värähtely ei missään tilanteessa aiheuta ongelmia. Tarkoituksena on kuitenkin näyttää, miten yleisimmät paikalla valetut teräsbetoniset välipohjarakenteet soveltuvat käytäntöön värähtelyn esiintyessä, ja millainen vaikutus rakenteeseen syntyvään dynaamiseen vasteeseen on, kun rakenteen ominaisuuksia muutetaan. Tämä toteutetaan suorittamalla tietokoneavusteisesti dynaamisen vasteen analyysi muutamalle yleiselle teollisuusrakennusten välipohjarakenteelle. Käytännössä suunnittelijan on rakenteen värähtelyherkkyyteen vaikuttavista ominaisuuksista mahdollista muuttaa ainoastaan sen jäykkyyttä ja massaa, joten niiden muutosten vaikutusta tul- laan tarkastelemaan.

## 1.4 Työn rajaus

Tässä diplomityössä käsitellään ainoastaan teräsbetonirakenteisia välipohjia. Puurakenteiden värähtelymitoitusta on käsitelty puurakenteiden suunnitteluohjeessa EN 1995-1-1, eikä puurakenteita normaalisti esiinny teollisuudessa. Myöskään teräs- ja teräs-betoniliittorakenteita ei käsitellä. Teräsbetonirakenteista käsitellään ainoastaan paikalla valettuja suorakaiteen muotoisia välipohjia, joten jännitetyjä elementtirakenteita, kuten TT- ja ontelolaattoja ei ole sisällytetty tähän työhön. Työn tuloksia on kuitenkin etenkin dynaamisten kuormien sekä mitoitusprosessin osalta mahdollista soveltaa myös muille kuin työssä tutkituille rakenteille.

Työ on lisäksi rajattu rakennusten käyttötarkoituksen mukaan koskemaan ainoastaan teollisuusrakennuksia. Tästä syystä dynaamisen kuormituksen aiheuttajia ovat pelkästään teollisuuden koneet ja laitteet. Työssä esitetään pääperiaatteet vain näiden aiheuttamien kuormitusten määrittämiseen ja analysointiin, sillä teollisuudessa esimerkiksi ihmisten liikkeiden aiheuttamien värähtelyjen vaikutukset ovat vähäisiä koneiden rinnalla. Työssä ei myöskään perehdytä tarkemmin erillisiin värähtelyjä absorboiviin tai kumoaviin rakenteisiin tai laitteisiin, joiden avulla värähtelyä on myös mahdollista hallita [6, s.8].

Välipohjille sallittavat värähtelyrajat esitetään työssä rakenteiden kestävyys, ihmisten tuntemaan värähtelyn sekä koneiden oikean toiminnan kannalta. Käytettävät värähtelyrajat on pääasiassa tarkoitettu koneperustusten suunnitteluun. Koska välipohjien mitoitukseen ei ole kirjallisuudessa esitetty tarkempia menetelmiä, käytetään näitä rajoja tässä työssä välipohjille.

## 1.5 Tutkimusmenetelmät ja tuotokset

Työ koostuu seitsemästä luvusta. Johdantoluvussa esitellään lukijalle työn tausta, tavoitteet ja rajaus. Seuraavassa luvussa käsitellään aluksi värähtelyä ilmiönä ja sen matemaattista perusteoriaa yhden vapausasteen värähtelyn kautta. Tämän jälkeen selvitetään lukijalle, mihin suorakaiteen muotoisen laattarakenteen ominaistuujuuden määrittäminen matemaattisesti perustuu, sekä miten laattarakenteen käyttäytymistä värähtelyn vaikuttaessa voidaan analysoida. Kolmannessa luvussa määritetään tarkemmin, minkä tyyppisiä välipohjarakenteita teollisuudessa yleisimmin esiintyy, sekä miten rakenteiden jäykkyyttä ja vaimennusominaisuuksia tulisi laskennallisesti arvioida. Luvut 2 ja 3 perustuvat sekä kotimaisesta että ulkomaisesta kirjallisuudesta saatavaan tietoon.

Neljännessä luvussa keskitytään teollisuudessa esiintyvien dynaamisten kuormitusten määrittämiseen sekä välipohjarakenteen varsinaisen värähtelymitoitusprosessin sekä värähtelyn raja-arvojen esittelyyn. Luku perustuu kirjallisuuskatsaukseen ja kohdeyrityksen käytäntöihin ja se pyrkii vastaamaan diplomityön ensimmäiseen tavoitteeseen selvittää lukijalle, miten välipohjan värähtelymitoitus teollisuusrakennuksessa suoritetaan ja mihin se perustuu. Lopputuloksena on tarkoitus saada aikaan katsaus yksinkertaisten koneiden

aiheuttamien dynaamisten kuormitusten määrittämisestä ja teollisuuden välipohjarakenteiden värähtelysuunnittelusta.

Luvussa 5 käsitellään menetelmiä välipohjarakenteiden ominaistajuuksien määrittämiseen. Aluksi esitellään eräs kirjallisuudesta löydettävissä oleva yksinkertaistettu laskentamenetelmä, jolla voidaan likimääräisesti arvioida työssä käsiteltävien laattarakenteiden ominaistajuuksia. Laskenta toteutetaan sekä tällä menetelmällä että tietokoneavusteisesti elementtimenetelmään (Finite Element Method, FEM) pohjautuvalla Autodeskin Robot Structural Analysis -ohjelmalla eräälle työn kohdeyrityksen suunnittelukohteessa esiintyneelle välipohjarakenteelle. Välipohjaa tarkastellaan kahdella eri rakennevaihtoehdolla: tasapaksuna teräsbetoni-laattana ja alapuolelta palkeilla jäykistettynä teräsbetoni-laattana. Tarkoitus on vastata työn toiseen tavoitteeseen esitellä menetelmiä välipohjarakenteiden ominaistajuuksien määrittämiseen.

Kuudennessa luvussa tarkastellaan, mikä vaikutus rakenteen ominaisuuksilla on sen käyttäytymiseen värähtelyn vaikutuksen alaisena ja vastataan näin työn kolmanteen tavoitteeseen. Tarkoitus on tutkia rakenteen massan ja jäykkyyden muutosten vaikutusta. Tätä tutkitaan tapaustutkimuksella, jossa välipohjarakenteen ominaisuuksia muutetaan järjestelmällisesti ja selvitetään rakenteen reagointi jokaisessa tutkitussa tapauksessa tiettyyn vakiona pidettävään dynaamiseen kuormitukseen. Tulokset esitetään kuvaajien avulla, joista on helposti nähtävissä ominaisuuksien muutosten vaikutus ja rakenteiden soveltuvuus. Tapaustutkimus toteutetaan tietokoneavusteisena laskennallisena tarkasteluna käyttäen edellä mainittua Robot -ohjelmaa. Lisäksi luvussa tulee käsiteltyä käytännössä luvussa neljä esitetty välipohjarakenteen mitoitusprosessi. Viimeisessä luvussa esitetään lukujen 5 ja 6 kautta tehtävät johtopäätökset ja vastataan tässä luvussa esitettyihin tutkimuksen tavoitteisiin.

## 2. VÄRÄHTELYN TEORIAA

### 2.1 Värähtely ilmiönä

Värähtely voidaan kuvailla fysikaalisen systeemin samanlaisena tai lähes samanlaisena toistuvana liikkeenä tietyn tasapainoaseman ympärillä [5]. Sillä on kaksi merkittävää eroa verrattuna staattiseen kuormitukseen:

- a) Systeemissä esiintyvät ulkoiset voimat muuttuvat ajan funktiona.
- b) Systeemin liikkeen myötä sen sisäiset palautusvoimat kasvavat.

Systeemin sisäisiä palautusvoimia ovat pääasiassa kimmovoimat ja painovoima, ja ne jakautuvat systeemille sen massan suhteessa. Systeemin ollessa liikkeessä palautusvoimat pyrkivät palauttamaan rakenteen takaisin alkuperäiseen stabiiliin tasapainoasemaansa. Rakenne palaa lähtöpisteeseensä, mutta johtuen nolasta poikkeavasta nopeudesta poikkeaa se jälleen tasapainosta. Näin syntyy systeemin värähtely. [6, s.2]

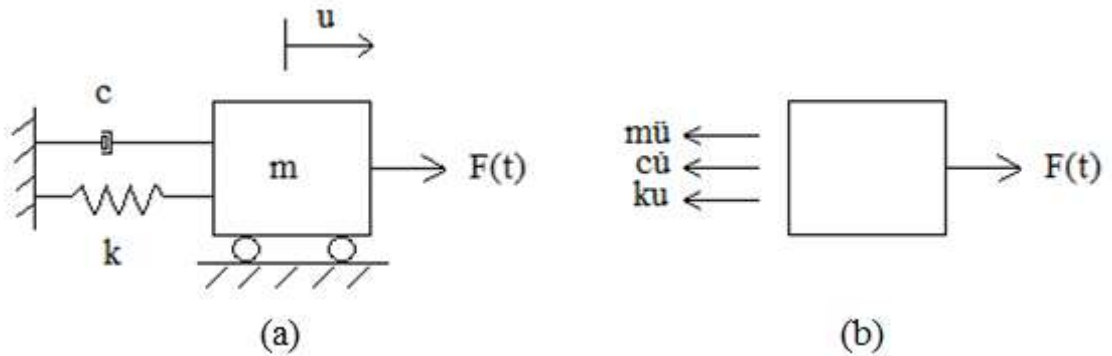
Mekaanisen systeemin värähtelyt jaetaan ominaisvärähtelyyn ja pakkovärähtelyyn [5, s.373]. Ominaisvärähtelyksi kutsutaan systeemin toistuvaa liikettä, kun se poikkeutetaan stabiilista tasapainoasemastaan ja päästetään vapaasti liikkumaan ilman yhtäaikaaisesti vaikuttavia ulkoisia voimia. Kun ulkoisia dynaamisia voimia vaikuttaa systeemissä, kutsutaan aiheutuvaa liikettä pakkovärähtelyksi. Systeemi värähtelee tällöin värähtelyn aiheuttajan määräämää pakkovärähtelyä. Näitä käsitellään tarkemmin seuraavaksi.

### 2.2 Yhden vapausasteen värähtely

Systeemin vapausasteilla tarkoitetaan kappaleelle mahdollisten liikkeiden suuntien lukumäärää. Jäykäksi ajatellulla kappaleella on yleisessä tapauksessa kuusi vapausastetta: kolme siirtymää ja kolme kiertymää. Mikäli kappaleita on useampia, vapausasteiden määrä kasvaa. Usein värähtelevät systeemit voidaan kuitenkin yksinkertaistaa yhden vapausasteen systeemeiksi, joilla on ainoastaan yksi mahdollinen liikesuunta, minkä kautta systeemin värähtelykäyttäytymistä on alustavasti kaikkein helpoin analysoida. Mahdollista on myös palauttaa systeemi useaksi eri yhden vapausasteen systeemiksi, joiden todellinen värähtely selvitetään yhdistelemällä eri värähtelymuodot. [6, s.9] [13, s.31]

Yhden vapausasteen värähdysliikkeen liikeyhtälön muodostamiseen on useita menetelmiä, joista yksinkertaisin lienee voimatasapainomenetelmän käyttäminen [13, s.32]. Voimatasapainomenetelmässä kuvan 1a mukaisen vaunun ajatellaan muodostavan yhden vapausasteen lineaarinen mekaaninen värähtelijä, jonka massa on  $m$ . Vaunu on kiinnitetty kiinteään runkoon jousella, jonka jäykkyyskerroin on  $k$ . Kerroin  $c$  kuvaa rakenteen viskoosivaimennusta, jonka oletetaan olevan suoraan verrannollinen vaunun nopeuteen.

Termi  $F(t)$  taas esittää systeemiä kuormittavaa ajasta riippuvaa pakkovoimaa ja  $u$  kappaleen siirtymää.



**Kuva 1.** Yhden vapausasteen värähtelijä ja sen vapaakappalekuvio, perustuu lähteeseen [6, s.12].

Kun piirretään vaunun vapaakappalekuvio (kuva 1b), saadaan siitä muodostettua yhden vapausasteen systeemille liikeyhtälö

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F(t) \quad (1)$$

jossa  $u$  on kappaleen siirtymä,  $\dot{u}$  nopeus ja  $\ddot{u}$  kiihtyvyys. Liikeyhtälö ilmaisee voimatasapainon, kun massa poikkeutetaan staattisesta tasapainoasemasta ja siitä voidaan havaita, että systeemin värähtelykäyttäytymiseen vaikuttavat tekijät ovat sen massa  $m$ , jäykkyys  $k$  sekä systeemissä esiintyvä vaimennus  $c$ . [13, s.32]

### 2.2.1 Vaimentamaton ominaisvärähtely

Kun kuvan 1a mukainen jousella alustaan tuettu massa häiriinnytään stabiilista tasapainoasemastaan ilman samaan aikaan vaikuttavia ulkoisia voimia  $F(t)$ , kappaleeseen syntyy liike. Tätä liikettä kutsutaan mekaanisen systeemin ominaisvärähtelyksi tai vapaaksi värähtelyksi [5, s.374]. Ominaisvärähtelyn yhteydessä vaikuttaa todellisuudessa aina liikettä vastustavia voimia, jotka pienentävät värähdysliikkeen amplitudia liikkeen pysähtymiseen asti. Kuitenkin joissain tilanteissa nämä vaimennusvoimat ovat niin pieniä, että niiden vaikutusta ei laskennassa kannata huomioida. Tällöin kysymyksessä on systeemin vaimentamaton ominaisvärähtely ja termi  $c\dot{u}$  supistuu pois lausekkeesta (1). Vaimentamattoman ominaisvärähtelyn liikeyhtälö on siis

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad (2)$$

Värähdysliikkeen kulmataajuutta  $\omega$  kutsutaan systeemin ominaiskulmataajuudeksi, jonka yksikkö on 1/s. Kun ominaiskulmataajuuden neliö merkitään jäykkyyden ja massan suhteena

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (3)$$

voidaan liikeyhtälön (2) tunnetun yleisen ratkaisun kautta siirtymän lauseke lausua

$$u(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t) \quad (4)$$

jossa  $C_1$  ja  $C_2$  ovat integroimisvakioita. Alkuehtojen  $u(0) = u_0$  ja  $\dot{u}(0) = v_0$  kautta siirtymän lausekkeeksi saadaan

$$u(t) = u_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \quad (5)$$

joka voidaan edelleen merkitä

$$u(t) = \hat{A} \sin(\omega t + \varphi) \quad (6)$$

Lauseessa (6)  $\hat{A}$  on amplitudi eli siirtymän  $u$  maksimiarvo ja  $\varphi$  värähtelyn vaihekulma.

Systeemin kahden peräkkäisen, samassa vaiheessa olevan pisteen välimatkaa aika-akselilla kutsutaan sen ominaisvärähdysajaksi  $T$ . Ominaisvärähdysajan käänteisluku, jota merkitään termillä  $f$ , on systeemin ominaistajuus, ja sen yksikkö on hertsi (Hz). Sini-muotoisen funktion perusjakson ollessa  $2\pi$  saadaan yhteydet ominaisvärähdysajalle, ominaistajuudelle ja ominaiskulmataajuudelle, jotka ovat

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (7)$$

$$\omega = 2\pi f \quad (8)$$

Ominaistajuus kertoo, millä dynaamisen kuormituksen taajuudella systeemi alkaa värähdellä ja on siksi tärkeä suure rakenteen värähtelykäyttäytymisen arvioimiseen. Ilman, että tiedetään systeemin ominaistajuus tai -taajuudet, on mahdotonta määrittää ulkoisen dynaamisen kuormituksen vaikutus systeemiin. [4, s.5]

## 2.2.2 Vaimennettu ominaisvärähtely

Kun systeemissä esiintyvä vaimennus huomioidaan ilman systeemissä vaikuttavaa ulkoista kuormitusta, on kyseessä systeemin vaimennettu ominaisvärähtely. Vaimennus on seurausta systeemissä vaikuttavista liikettä vastustavista voimista, joiden tekemä työ muuttaa systeemin mekaanisen energian pääasiassa lämmöksi, jolloin energiaa poistuu värähtelysteemistä [5, s.373]. Käytännössä vaimennuksen arvon määrittäminen todellisille rakenteille on vaikeaa tai mahdotonta, joten se ilmaistaan yleensä kokeellisesti määritettyjen arvojen avulla [14, s.18]. Se jaetaan viskoosiseen vaimennukseen, kitkavaimennukseen sekä hystereesiin eli materiaalin sisäiseen vaimennukseen. Lausekkeessa (1) oletettiin vaimennuksen olevan nopeuteen verrannollinen, jolloin kyseessä on viskoosinen



vaimennus. Se on seurausta väliaineen eli nesteen tai kaasun kitkasta ja todellisuudessa aiheutuu esimerkiksi kappaleen liikkeessä pienellä nopeudella kitkallisessa nesteessä. Vaikka vaimennus ei usein olekaan täydellisesti viskoosia, voidaan se kuvata sellaisena matemaattisen käsittelyn helpottamiseksi. [13, s.62]

Yhden vapausasteen systeemin liikeyhtälö (1) kirjoitetaan vapaan vaimennetun värähtelyn tapauksessa [5]

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (9)$$

Kun lause (9) muutetaan lineaariseksi vakiokertoimiseksi homogeeniseksi differentiaaliyhtälöksi jakamalla se massalla  $m$ , se saadaan muotoon

$$\ddot{u} + \frac{c}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u = 0 \quad (10)$$

Jotta lauseelle (10) löydetään ratkaisu, sijoitetaan siirtymäksi yrite

$$u(t) = Ae^{\lambda t} \quad (11)$$

jossa  $A$  ja  $\lambda$  ovat apitermejä. Tällöin yhteisten tekijöiden supistuessa pois karakteristiseksi yhtälöksi voidaan kirjoittaa

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0 \quad (12)$$

Lausekkeen (12) juuret voivat olla joko reaaliset ja erisuuret, reaaliset ja yhtä suuret, tai kompleksiset liittoluvut. Ratkaisu riippuu vaimennuskertoimen  $c$  arvosta. Yhtälön (12) juurien ollessa yhtä suuret kutsutaan tätä vastaavaa vaimennuskerrointa kriittiseksi vaimennuskertoimeksi  $c_k$ . Toisen asteen yhtälölle juuret voivat olla yhtä suuret vain silloin, kun yhtälön diskriminantti on nolla. Näin ollen toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan kautta voidaan merkitä

$$\frac{c^2}{m^2} - 4\frac{k}{m} = 0 \quad (13)$$

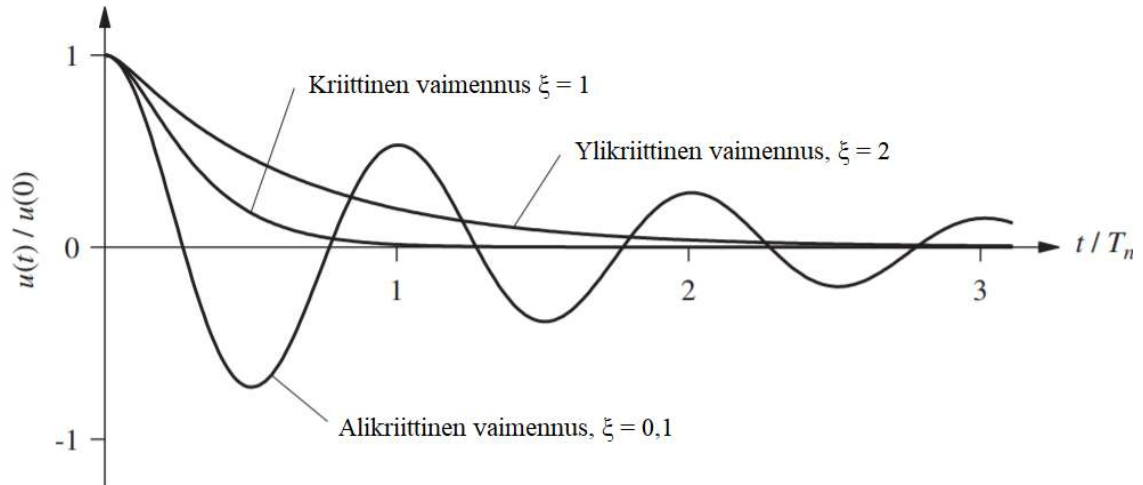
Sijoittamalla lauseen (3) mukainen vaimentamattoman värähtelijän ominaiskulmataajuus lauseeseen (13) saadaan kriittiseksi vaimennuskertoimeksi

$$c_k = 2m \sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega \quad (14)$$

Vaimennus ilmaistaan usein suhteellisen vaimennuskertoimen  $\xi$  avulla, joka kuvaa systeemin todellisen vaimennuksen  $c$  suhdetta sen kriittiseen vaimennukseen  $c_k$ , eli

$$\xi = \frac{c}{c_k} \quad (15)$$

Kriittinen vaimennus ilmaisee siis pienimmän tarvittavan vaimennuksen määrän palauttamaan systeemi tasapainotilaansa ilman värähtelyä [15, s.49]. Vaimennus voidaan luokitella ylikriittiseen ( $\xi > 1$ ), kriittiseen ( $\xi = 1$ ) ja alikriittiseen ( $\xi < 1$ ) vaimennukseen. Kuvassa 2 on esitetty systeemin liike eri vaimennustyypeissä.



**Kuva 2.** Eri tavoin vaimennettujen systeemien liike, perustuu lähteeseen [15, s.49].

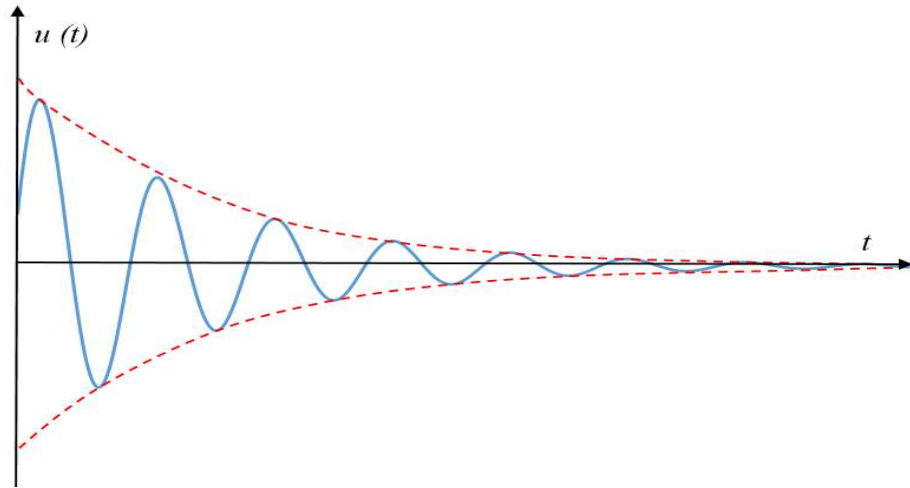
Kuvasta 2 nähdään, että ylikriittisen ja kriittisen vaimennuksen tapauksessa systeemi ei värähtele. Rakennuksilla ja rakenteilla suhteellisen vaimennuksen arvo on tyypillisesti pienempi kuin 20 %, joten rakennustekniikan kannalta vaimennuksen olennaisin tapaus on alikriittinen vaimennus [15, s.50]. Alikriittisesti vaimennetun systeemin siirtymä voidaan kirjoittaa [5, s.381-382]

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} \left( u_0 \cos(\omega_d t) + \left( \frac{v_0 + \xi\omega u_0}{\omega_d} \right) \sin(\omega_d t) \right) \quad (16)$$

jossa termi  $\omega_d$  on vaimennetun systeemin ominaiskulmataajuus

$$\omega_d = \sqrt{1 - \xi^2} \omega \quad (17)$$

Lausekkeesta (17) nähdään, että vaimennetun systeemin ominaiskulmataajuus on aina pienempi kuin vaimentamattoman systeemin. Kuitenkin pienillä, alle 20 %:n suhteellisen vaimennuksen arvoilla sen vaikutus ominaiskulmataajuuteen jää hyvin vähäiseksi [15, s.425]. Kuvassa 3 on esitetty lauseen (16) mukainen alikriittisesti vaimennetun systeemin siirtymä ajan funktiona.



**Kuva 3.** Alikriittisesti vaimennetun värähtelijän siirtymävaste

Kuvaajasta erottuu selvästi värähtelyn amplitudin pieneneminen jokaisella värähdysjaksolla. Vaimenevan ominaisvärähtelyn värähdysaika voidaan laskea kaavalla [5, s.382]

$$T_d = \frac{T}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (18)$$

Lausekkeesta (18) havaitaan, että vaimennus pidentää systeemin värähdysaikaa, mutta kuten edellä on mainittu, pienillä suhteellisen vaimennuksen arvoilla vaikutus on lähes olematon.

### 2.2.3 Harmoninen pakkovärähtely

Pakkovärähtelyllä tarkoitetaan systeemin jaksollista liikettä, kun systeemissä vaikuttaa palautusvoimien lisäksi dynaamisia kuormituksia  $F(t)$ . Tuotaessa systeemiin heräte, eli värähtelyn aiheuttaja, se värähtelee herätteen määräämää pakkovärähtelyä. Herätteen ohella systeemin ominaisuudet eli massa, jäykkyys ja vaimennus vaikuttavat siihen, millä tavalla häiriön systeemiin tuotu heräte aiheuttaa. [5, s.386]

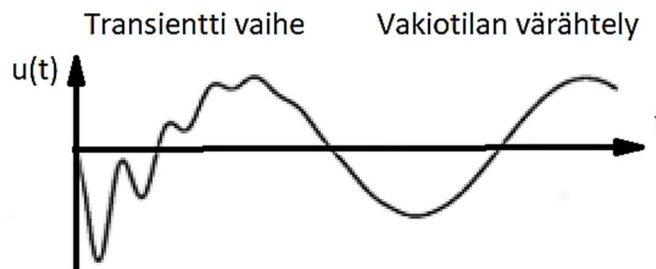
Herätteet jaotellaan deterministisiin ja epädeterministisiin herätteisiin. Deterministinen heräte voidaan täsmällisesti kuvata matemaattisesti, ja se voi olla jaksollista tai jaksotonta. Jaksolliset herätteet jaetaan edelleen harmonisiin ja epäharmonisiin herätteisiin. Epädeterministinen heräte taas esitetään todennäköisyyslaskennan avulla, sillä sen kuvaaminen jonkin tietyn matemaattisen funktion avulla ei ole mahdollista. Jaksollisten herätteiden erityistapaus on sinimuotoinen harmoninen heräte

$$F(t) = \hat{F} \sin(\Omega t + \varphi_F) \quad (19)$$

jonka kautta pakkovärähtelyä tässä luvussa jatkossa tarkastellaan. Lauseessa (19)  $\hat{F}$  on herätteen amplitudi,  $\Omega$  on herätteen kulmataajuus ja  $\varphi_F$  herätteen vaihekulma, joka

voidaan aikaorigon oikealla valinnalla olettaa nolaksi, jos herätteessä on vain yksi harmoninen komponentti. [5, s.385]

Systeemi pyrkii seuraamaan herätettä, joten siihen syntyy siirtymää  $u(t)$ . Tätä rakenteen reaktiota dynaamiseen kuormitukseen kutsutaan siirtymävasteeksi. Vaste voidaan kuvata myös nopeusvasteena  $v(t)$  tai kiihtyvyydvasteena  $a(t)$ . Aluksi systeemiin aiheutuvaan pakkovärähtelyyn on superponoituneena systeemin ominaisvärähtely, joka systeemissä esiintyvän vaimennuksen vaikutuksesta häviää kuitenkin nopeasti. Ominaisvärähtelyn vaimenemista kutsutaan pakkovärähtelyn transientiksi vaiheeksi. Kuvassa 4 on esitetty systeemin pakkovärähtelyn vaiheet. Ominaisvärähtelyn vaimennuttua jäljelle jää ainoastaan niin kutsuttu vakiotilan värähtely. Vakiotilan pakkovärähtelyä kutsutaan myös pysyväksi värähtelyksi ja se esiintyy esimerkiksi koneiden ja laitteiden jatkuvan käytön yhteydessä. Sen aiheuttamat vauriot rakennuksen ja koneen rakenteissa ovat pääasiassa väsymis- ja kulumisvaurioita. [5] [13]



**Kuva 4.** Pakkovärähtelyn transientti vaihe ja vakiotilan värähtely [13]

Yhden vapausasteen vaimentamattoman värähtelijän liikeyhtälön (1) ratkaisu pakkovärähtelyssä on ominaisvärähtelyn tapauksessa esitetyn homogeenisen yhtälön (4) ratkaisun ja jonkin yksityisratkaisun summa. Kun tiedetään todellisissa värähtelijoissa esiintyvän aina jonkin verran vaimennusta, joka hävittää pakkovärähtelyn transientin vaiheen, voidaan jäljelle jäävä vakiotilan pakkovärähtelyn vaste ilman ominaisvärähtelyä kirjoittaa pelkästään yksityisratkaisun kautta [5, s.387]. Näin ollen pakkovärähtelyn vaste vaimentamattomalle värähtelijälle on

$$u(t) = \frac{\bar{u}_{st}}{1 - (\Omega/\omega^2)} \sin(\Omega t) \quad (20)$$

Lauseessa (20)  $\bar{u}_{st}$  on systeemin staattisen tilanteen siirtymä, jos systeemissä vaikuttaisi staattinen voima, jonka suuruus on dynaamisen kuormituksen amplitudi  $\hat{F}$ . Voiman ja siirtymän välillä on tunnetusti yhteys

$$\bar{u}_{st} = \frac{\hat{F}}{k} \quad (21)$$

jossa  $k$  on jousivakio. Pakkovärähtelyn vaste kirjoitetaan usein muodossa

$$u(t) = V \bar{u}_{st} \sin(\Omega t + \varphi) \quad (22)$$

jossa  $V$  on vahvistuskerroin [5, s.388]. Vaimentamattoman systeemin tapauksessa se on

$$V = \frac{1}{1 - (\Omega/\omega)^2} \quad (23)$$

Vaimentamattoman systeemin vakiotilan pakkovärähtely tapahtuu pakkovoiman kanssa samaan tahtiin systeemin liikkeessa pakkovoiman suuntaan, mikäli vahvistuskerroin on positiivinen [5, s.388]. Jos kerroin on negatiivinen, tapahtuvat värähtelyt vastakkaiseen suuntaan. Siirtymävasteen ratkaisu (22) ei ole voimassa, kun herätteen  $\Omega$  taajuus on yhtä suuri kuin systeemin ominaistajuus  $\omega$ . Tätä niin kutsuttua resonanssi-ilmiötä käsitellään lisää myöhemmin.

Kun systeemissä esiintyy alikriittistä vaimennusta ja siihen vaikuttaa lausekkeen (19) mukainen harmoninen pakkovoima, systeemiin värähtelyn liikeyhtälö kirjoitetaan muodossa

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = \hat{F} \sin(\Omega t) \quad (24)$$

Kyseessä on tällöin systeemin vaimennettu pakkovärähtely. Käyttäen aikaisemmin esitettyjä yhteyksiä vaimennuskertoimen, jäykkyyskertoimen ja massan välillä liikeyhtälö voidaan kirjoittaa standardimuodossa

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = \omega^2 \bar{u}_{st} \sin(\Omega t) \quad (25)$$

Kuten vaimenemattoman pakkovärähtelyn tapauksessa, myös vaimenevan pakkovärähtelyn liikeyhtälö on homogeenisen yhtälön ratkaisun ja jonkin yksityisratkaisun summa. Kun tiedetään, että homogeeniosan ratkaisu edustaa systeemin ominaisvärähtelyjä, jotka vaimennetussa systeemissä nopeasti häviävät ajan mukana, jää jäljelle vain pysyvä värähtely ja systeemin siirtymävaste voidaan lausua lausekkeen (22) avulla. Vahvistuskerroin on vaimennetun systeemin tapauksessa [5, s.394-395]

$$V_d = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\frac{\Omega}{\omega})^2]^2 + (2\xi \frac{\Omega}{\omega})^2}} \quad (26)$$

Vaimennetun systeemin vahvistuskerroin kuvaa siis systeemin staattisen ja dynaamisen siirtymän suhdetta ominaiskulmataajuuden, herätteen ja systeemin suhteellisen vaimennuksen funktiona.

## 2.2.4 Resonanssi

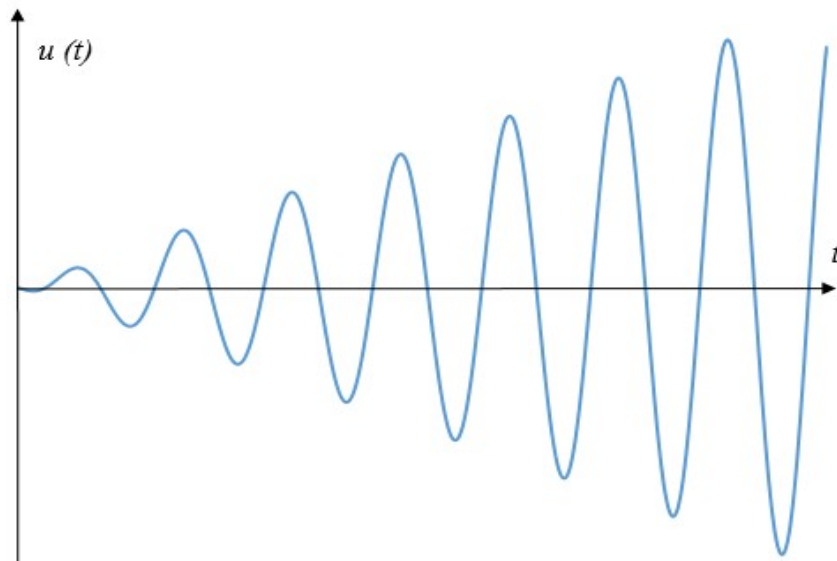
Systeemin värähtely kasvaa voimakkaasti, mikäli liikkeen aiheuttavan pakkovoiman taajuus  $\Omega$  lähestyy tai yhtyy rakenteen ominaistajuuteen  $\omega$ . Ilmiötä kutsutaan resonanssiksi. Resonanssin välttäminen muodostaa keskeisen osan koneiden ja rakenteiden suunnittelua

dynaamisten kuormien vaikuttaessa, sillä resonanssin esiintyessä vaste pääsee kehittymään voimakkaasti ja systeemi saattaa ajan kuluessa vaurioitua. [5, s.388]

Kuten edellä todettiin, siirtymävasteen lauseke (22) ei ole voimassa resonanssitilanteessa. Vaimentamattomalle värähtelijälle resonanssitilanteen siirtymävaste kirjoitetaan [5, s.388]

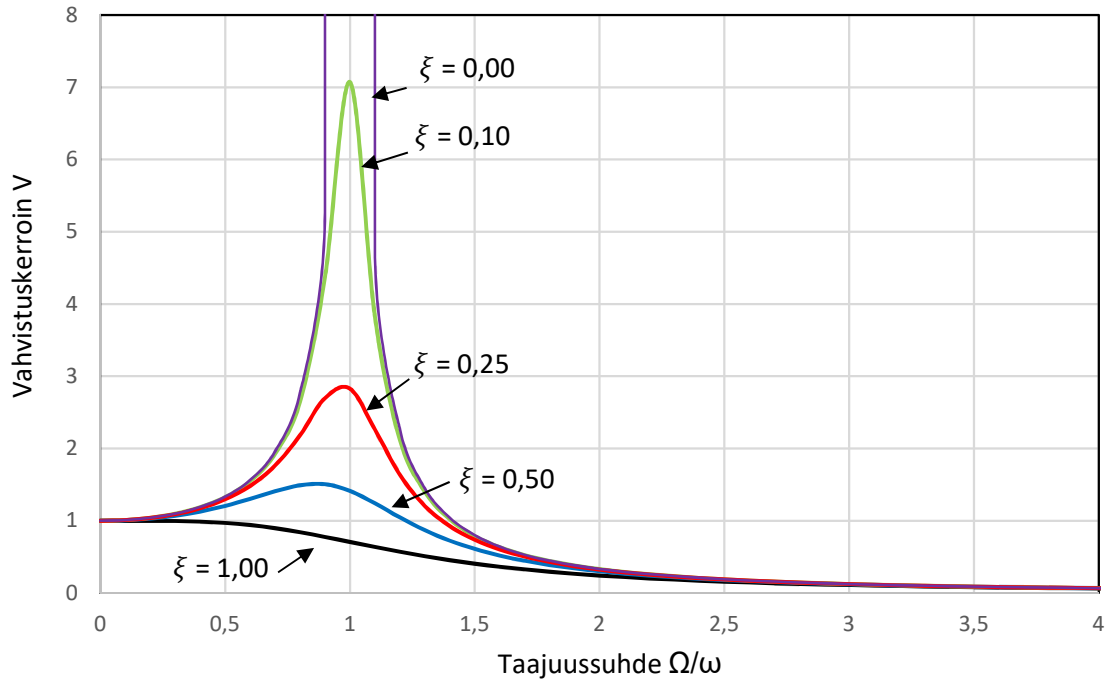
$$u(t) = -\frac{1}{2} \bar{u}_{st} \omega t \cos(\omega t) \quad (27)$$

Lausekkeen (27) mukaisen siirtymävasteen kuvaaja ajan funktiona on esitetty kuvassa 5.



**Kuva 5.** Vaimentamattoman värähtelijän siirtymävaste resonanssissa

Kuvasta 5 voidaan nähdä, että resonanssitilanteessa systeemin vaste alkaa kasvaa kohti ääretöntä ajan kuluessa, jolloin aiheutuu riski värähtelysysteemin vaurioitumiselle. Todellisissa systeemeissä esiintyy kuitenkin aina jonkin verran vaimennusta, ja jo pieni suhteellinen vaimennus rajoittaa resonanssitilanteen vastetta merkittävästi. Värähtelyn amplitudi ei siis voi kasvaa rajatta resonanssitilanteessakaan. Kuvassa 6 on esitetty vaimennetun systeemin vahvistuskertoimen arvo taajuussuhteen funktiona eri vaimennuksen arvoilla.



**Kuva 6.** Vaimennetun pakkovärähtelyn vahvistuskertoim taajuussuhteen funktiona eri vaimennuskertoimilla.

Kuvan 6 perusteella nähdään selvästi resonanssin välttämisen tarpeellisuus tai hyödyllisyys. Siitä havaitaan, että taajuussuhteen lähestyessä arvoa 1 vahvistuskertoim lähenee ääretöntä, kun suhteellinen vaimennuskertoim on nolla. Kyseessä on tällöin kuvan 5 mukainen tilanne. Vaimennusta kasvatettaessa vahvistuskertoim ja näin ollen myös siirtymä-vaste pienenevät huomattavasti. Arvoa 1 huomattavasti suurempien taajuussuhteiden tapauksessa nähdään, että vaimennuksen lisäämisellä ei ole juuri vaikutusta syntyvään vasteeseen, vaan vaste pysyy samalla matalalla tasolla.

Kuvasta 6 nähdään myös, että vaimennuksen arvon kasvaessa vahvistuskertoimen ääriarvoa ei saavuteta kohdassa  $\Omega = \omega$  vaan hieman aikaisemmin. Salmen ja Virtasen [5, s.395] mukaan vahvistuskertoimen maksimikohta saadaan derivoimalla vahvistuskertoimen lauseke, jolloin se on

$$\frac{\Omega}{\omega} = \sqrt{1 - \xi^2} \quad (28)$$

ja näin ollen vahvistuskertoimen maksimi saa arvon

$$V_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (29)$$

Tavallisesti voidaan kuitenkin olettaa vaimenevankin värähtelyn resonanssin olevan kohdassa  $\Omega = \omega$  [5, s.395]. Chopran [15, s.50] mukaan lähes kaikille rakenteille suhteellinen vaimennus on alle 20 %, joten suuremmilla arvoilla ei ole käytännön merkitystä. Kuten kuvasta 6 havaitaan, alle 25 % suhteellisella vaimennuksella vahvistuskertoimen

huippuarvo on hyvin lähellä taajuussuhteen arvoa 1. Betonirakenteiden vaimennusominaisuuksia käsitellään lisää luvussa 3.

## 2.3 Laattarakenteen värähtely

Suuri osa rakennesuunnittelussa käsiteltävistä rakenteista on kuvattava jatkuvina värähtelysysteeminä, joilla materiaaliominaisuudet ovat jakautuneet pitkin rakennetta, eikä rakennetta näin voida analysoida yhtenä keskitettynä massana kuten edellä [6, s.53]. Jatkuvalla systeemillä tarkoitetaan sellaista matemaattista mallia, jossa kaikki käsitelty massa on suoraan liitoksissa toisiinsa. Eräs esimerkki jatkuvasta systeemistä on tässä työssä käsiteltävä laatta. Laatta on rakenne, jolla on taivutusjäykkyys kahteen suuntaan, ja jossa massa on jakautunut sen koko pinta-alalle. Jatkuvalla systeemillä on ääretön määrä vapausasteita, jolloin myös sen ominaistuuksia on äärettömästi [13, s.200]. Jokaisella ominaistuuksella on olemassa oma värähtelymuotonsa, joka kuvaa systeemin muotoa sen maksimitaipumassa. Massiivisilla laattarakenteilla alin ominaistuuksia eli perusominaistuuksia vastaa usein tarkasti rakenteen staattista taipumaa [9, s.16].

Rakenteiden värähtelyanalyysissä ollaan yleensä kiinnostuneita ainoastaan rakenteen alimmista ominaistuuksista ja -muodoista, sillä korkeammilla taajuuksilla ei monesti-kaan massiivisten rakenteiden tapauksessa ole merkitystä alempien rinnalla. Hyvin hoidetuilla rakenteilla, kuten esimerkiksi ohuilla jäykistetyillä kuorirakenteilla, voidaan kuitenkin joutua huomioimaan hyvinkin korkeita ominaismuotoja. Rakenteen eri ominaistuuksien tärkeyttä voidaan arvioida moodimassan avulla. Moodimassa kertoo, kuinka paljon rakenteen massasta osallistuu kyseiseen värähtelymuotoon, ja edelleen, kuinka paljon liike-energiaa systeemissä on kyseisen ominaismuodon esiintyessä. Värähtelyyn osallistuva massa ilmaisee siis suoraan, kuinka tärkeä kyseisen värähtelymuoto on värähtelyanalyysin kannalta. [4, s.8]

### 2.3.1 Suorakaidelaatan vapaa värähtely

Keskeisen osan laattarakenteen värähtelymitoituksesta muodostaa sen ominaistuuksien selvittäminen, sillä kuten edellä mainittiin, rakenteen ominaistuuksien kertovat, millä taajuuksilla rakenne helpoiten värähtelee. Laattarakenteen ominaistuuksien ja värähtelymuodot ovat määritettävissä tutkimalla rakenteen vapaata värähtelyä. Sen käyttäytymistä voidaan värähtelytilanteessa staattisen kuormitusolosuhteiden tapaan analysoida ohuen laatan teorian mukaisesti. Tätä teoriaa käytettäessä tehdään oletukset, että laatan taipuma  $w$  on pieni suhteessa laatan paksuuteen  $h$ , laatan keskipinta ei veny, ja laatan keskitason normaalit säilyvät suorina sekä keskitason normaaleina deformaation aikana [16, s.145]. Teoriaa voidaan yleisesti soveltaa laatoille, joiden paksuus on 10 prosenttia tai vähemmän laatan jännevälillä [17].

Seuraavassa johdetaan kimmoisen laatan perusyhtälöiden kautta laatan taipuma vapaassa värähtelyssä laattateorian mukaisesti, minkä kautta on edelleen mahdollista ratkaista



laatan ominaistaajuudet. Esimerkkinä käytetään neljältä reunalta vapaasti tuettua suorakaidelaattaa. Edellä esitetyt laattateorian oletukset johtavat kinemaattisiin otaksumiin, joiden kautta saatavat momenttien ja taipuman väliset konstitutiiviset yhtälöt voidaan sijoittaa momenttien avulla lausuttuun laatan tasapainoyhtälöön [16, s.150]. Tällöin laatan tasapainoyhtälö voidaan kirjoittaa

$$\Delta \Delta w(x, y) = \frac{q_z(x, y)}{K} \quad (30)$$

missä  $q_z(x, y)$  on laatan tasoa vastaan kohtisuoraan tasaisesti jakautunut kuormitus,  $K$  isotrooppisen laatan taivutusjäykkyys

$$K = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (31)$$

ja  $\Delta$  Laplace-operaattori [13, s.236]

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (32)$$

Dynaamisessa tilanteessa poikittainen kuorma  $q_z(x, y)$  on ajasta riippuva. Myös laatan massahitausvoima  $m\ddot{u}$  on lisättävä tasapainoyhtälöön. Näin differentiaaliyhtälö (30) saadaan muotoon

$$K \Delta \Delta w(x, y, t) + m(x, y) \ddot{w}(x, y, t) - q_z(x, y, t) = 0 \quad (33)$$

Vapaan värähtelyn tapauksessa poikittainen kuorma  $q_z(x, y, t)$  on nolla. Olettamalla, että laatan pisteiden liike on synkronista ja näin värähtely harmonista, voidaan taipuma kirjoittaa myös muodossa

$$w(x, y, t) = W(x, y) \sin(\omega t) \quad (34)$$

missä  $W(x, y)$  on värähtelyn amplitudi [13, s.237]. Merkitään laatan massaa pinta-alayksikköä kohti  $\bar{m} = m(x, y)$ . Kun yhtälö (34) sijoitetaan yhtälöön (33) poikittaisen kuorman ollessa nolla, saadaan edelleen

$$\Delta \Delta W(x, y) - \frac{\bar{m} \omega^2}{K} W(x, y) = 0 \quad (35)$$

Esimerkiksi neljältä reunalta vapaasti tuetun suorakaidelaatan tapauksessa harmonisen värähtelyn taipuman lauseke on laattateorian kautta kirjoitettavissa

$$w(x, y, t) = X(x)Y(y)\sin(\omega t) \quad (36)$$

Lausekkeen on toteutettava vapaasti tuetun laatan reunaehdot. Merkitään laatan sivumittoa  $x$ - ja  $y$ -suunnassa symboleilla  $a$  ja  $b$ . Reunaehdot laatan vapaasti tuetulla reunalla

$(x = a)$  ovat  $w(a, y) = 0$  ja  $w_{,xx}(a, y) = 0$ . Sijoittamalla näiden reunaehtojen kautta lausekkeelle (36) saatava muoto sekä Laplace-operaattori yhtälöön (35), saadaan se muotoon [13, s.237]

$$\frac{\partial^4 X}{\partial x^4} Y + 2 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + X \frac{\partial^4 Y}{\partial y^4} - \frac{\bar{m}\omega^2}{K} XY = 0 \quad (37)$$

Kun reunaehdot ovat sopivat, on ominaistajuuksien ja -muotojen määrittämisessä mahdollista käyttää hyväksi näille reunaehdoille määritettyjä matemaattisia ratkaisuja. Tässä tutkittavalle tapaukselle eli vapaasti neljältä reunalta tuetulle suorakaidelaatalle taipuma on esitettävissä Fourierin kaksoissinisarjakehitelmän avulla eli niin kutsutulla Navierin ratkaisulla [16, s.157]

$$w(x, y) = X(x)Y(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} W_{ij} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} \quad (38)$$

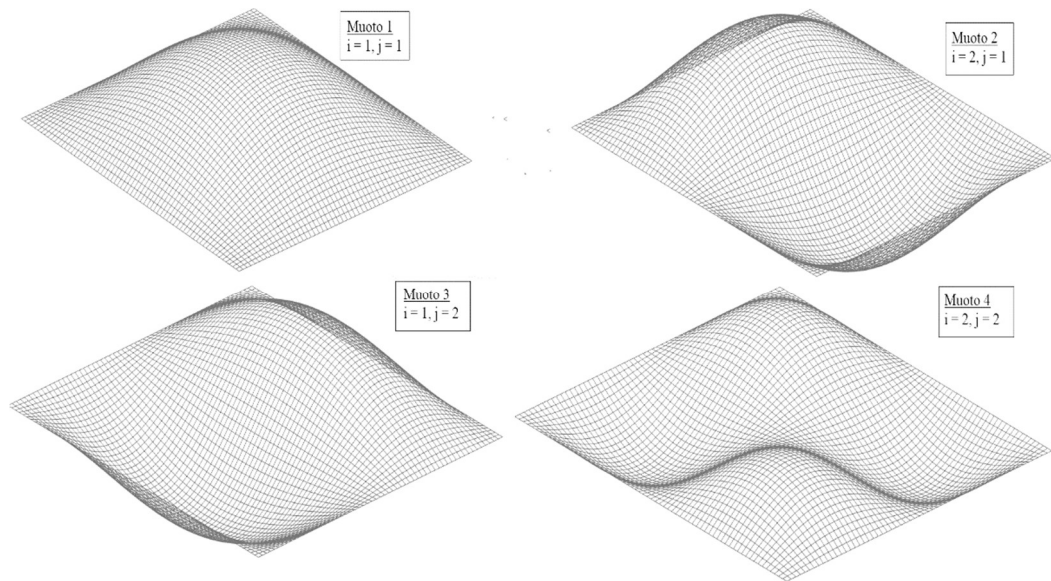
missä  $i$  on x-suuntaisen sinimuotoisen värähtelyn siniaallon puolikas ja  $j$  vastaavasti y-suuntaisen värähtelyn siniaallon puolikas. Kun Navierin ratkaisu sijoitetaan yhtälöön (37), saadaan vapaalle värähtelylle lopulta lauseke

$$\frac{i^4 \pi^4}{a^4} + 2 \frac{i^2 \pi^2}{a^2} \frac{j^2 \pi^2}{b^2} + \frac{j^4 \pi^4}{b^4} - \frac{\bar{m}\omega^2}{K} = 0 \quad (39)$$

josta edelleen saadaan ratkaistua vapaasti tuetun suorakaidelaatan ominaiskulmanopeus [13, s.238]

$$\omega_{ij} = \pi^2 \left( \frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{K}{\bar{m}}} \quad (40)$$

Laatan alin ominaistajuuksien eli perusominaistajuuksien saadaan valitsemalla siniaaltojen puolikkaiden lukumääräksi molemmissa suunnissa 1, jolloin värähtelymuoto vastaa pitkälti laatan staattista taipumaa [9]. Kuvassa 7 on esitetty erään neljältä reunalta tuetun isotrooppisen suorakaidelaatan neljä alinta värähtelymuotoa. Siitä on selvästi nähtävissä alimman värähtelymuodon 1 samankaltaisuus laatan staattiseen taipumaan verrattuna.



**Kuva 7.** Erään neljältä reunalta vapaasti tuetun isotrooppisen suorakaidelaatan neljä alinta värähtelymuotoa.

Ominaiskulmanopeudet ja -taajuudet ovat määritettävissä myös muille sopiville reunaehdoille käyttämällä Navierin ratkaisun kaltaisia, yleisesti tunnettuja ratkaisumenetelmiä. Monesti laattojen värähtelytehtävä johtaa kuitenkin matemaattisiin vaikeuksiin, kun reunaehdot eivät ole yhtä yksinkertaisia [13, s.239]. Tästä huolimatta myös näille tapauksille yhtälöt ominaistajuuksille ovat saatavilla, sillä yleisiä likiratkaisuja on esitetty paljon kirjallisuudessa. Blevins [17] on koonnut kattavan teoksen erilaisten rakenteiden ominaistajuuksista ja -muodoista, mistä ovat löydettävissä myös suorakaidelaatoille menetelmät tärkeimpien reunaehtojen mukaisten ominaistajuuksien määrittämiseen. Näitä esitellään tarkemmin luvussa 5.

### 2.3.2 Suorakaidelaatan pakkovärähtely

Jatkuvan systeemin pakkovärähtelyn aiheuttaman vasteen ratkaisemiseksi on löydettävä ratkaisu usean vapausasteen systeemin liikeyhtälölle

$$M\ddot{\mathbf{u}} + C\dot{\mathbf{u}} + K\mathbf{u} = \mathbf{P} \quad (41)$$

jossa  $\mathbf{M}$  on systeemin massamatriisi,  $\mathbf{C}$  vaimennusmatriisi,  $\mathbf{K}$  jäykkyysmatriisi,  $\mathbf{P}$  kuormitusvektori sekä  $\ddot{\mathbf{u}}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}$  ja  $\mathbf{u}$  ovat systeemin kiihtyvyys-, nopeus- ja siirtymävektorit. Siirtymävektorien ratkaisuja voidaan käyttää systeemin sisäisten voimien ja jännitysten laskemiseksi millä tahansa ajan hetkellä. Matriisien määrittämistä ei tässä käsitellä tarkemmin. [6, s.81]

Usean vapausasteen systeemin liikeyhtälön (41) yhtälöryhmän ratkaisu koostuu kahdesta osasta kuten yhdenkin vapausasteen systeemilläkin eli homogeenisestä yhtälöstä ja jostakin yksittäisratkaisusta. Homogeenisen yhtälön ratkaisu edustaa systeemin ominaisvärähtelyä, joka vaimentamattoman värähtelyn tapauksessa on

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0 \quad (42)$$

Kun tarkastellaan massan synkronista värähtelyä, on systeemin aikariippuvuus tämän tarkia harmonista, jolloin yhtälön (42) siirtymävektorin ratkaisu on muotoa

$$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\phi} \cos \omega t \quad (43)$$

jossa  $\boldsymbol{\phi}$  vapaan värähtelyn amplitudivektori ja  $\omega$  ominaiskulmanopeus. Sijoittamalla ratkaisu (43) yhtälöön (42) se johtaa ominaisarvotehtävään

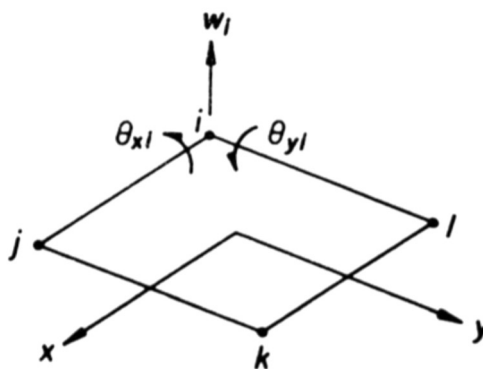
$$\mathbf{K}\boldsymbol{\phi} = \omega^2 \mathbf{M}\boldsymbol{\phi} \quad (44)$$

josta voidaan ratkaista usean vapausasteen systeemin ominaiskulmanopeudet. Ne saadaan asettamalla yhtälöryhmän determinantti nolllaksi eli

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (45)$$

Kun lauseesta (45) ratkaistut juuret sijoitetaan jokainen vuorollaan yhtälöön (43) saadaan yhtälöryhmästä selville jokaista ominaismuotoa vastaavat ominaisvektorit, toisin sanoen systeemin ominaismuodot [13, s.131-132]. Laattarakenteiden analysointi suoritetaan yleensä numeerisilla laskentamenetelmillä. Näistä tunnetuin ja käytetyin on elementtimenetelmä [6, s.81]. Elementtimenetelmässä rakenne idealisoidaan diskreetiksi eli jaetaan äärelliseen määrän rakennetyyppeihin soveltuvia elementtejä, joilla on yksinkertainen geometria. Nämä elementit liittyvät toisiinsa pisteissä, joita nimitetään solmuiksi. Laskenta perustuu solmupisteiden siirtymien ratkaisemiseen. Siirtymätilaa approksimoidaan jokaisen elementin alueella käyttäen muotofunktiota, joka kuvaa rakenteen siirtymää missä tahansa elementin sisäisessä pisteessä. [13, s.290-291]

Laattarakenteiden analysoimiseksi elementtimenetelmällä rakenne jaetaan siis pienemmiksi elementeiksi, joista esimerkkinä on kuvan 8 mukainen suorakaiteen muotoinen laattaelementti. Elementin jokaista nurkkapistettä käsitellään solmuna, joista jokaisella on kolme vapausastetta: kaksi kiertymää ja yksi siirtymä kuvan 8 tapaan. Näin ollen yhden elementin vapausasteiden lukumäärä on 12, joten yhden elementin siirtymätilan approksimointiin käytettävän muotofunktion tulee sisältää 12 vakiota. Elementtien välinen vuorovaikutus analysoidaan systemaattisesti vakiodulla matemaattisella menetelmällä yleensä tietokoneavusteisesti. [6, s.70 & 121]



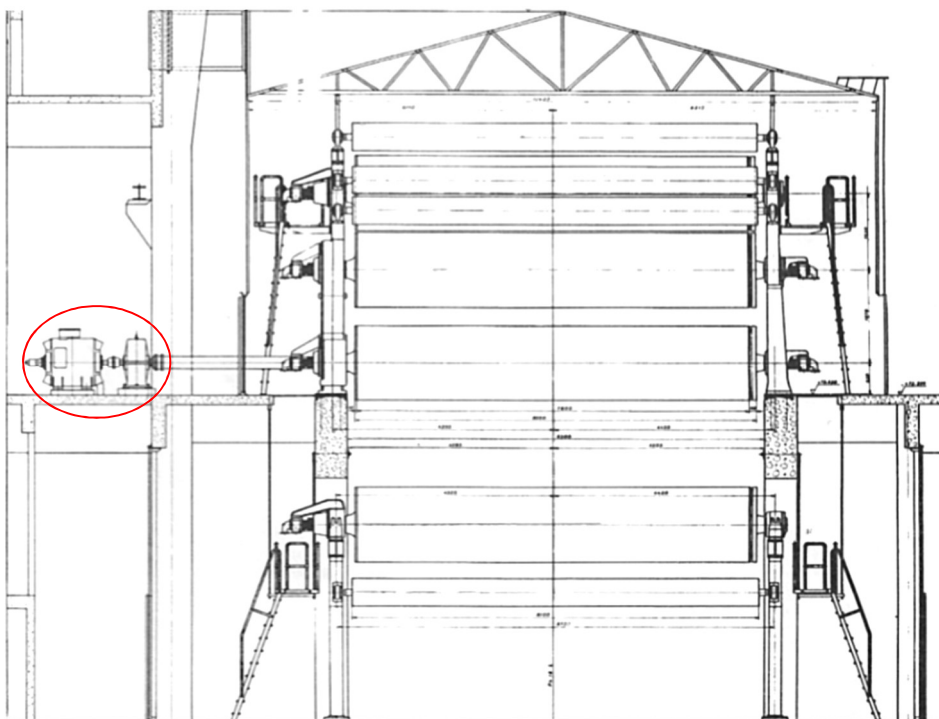
**Kuva 8.** Laattaelementti ja solmujen vapausasteet [6, s.121].

Kun erillisten solmujen siirtymät ovat tiedossa, voidaan interpolaatiofunktioiden avulla ratkaista koko rakenteen siirtymäkenttä. Jokaisessa elementissä siirtymäkenttä on esitetty superponoimalla pientä yksinkertaisten funktioiden joukkoa, jotka kuitenkin edustavat elementtien rakenteellista käyttäytymistä riittävällä tarkkuudella. Tässä työssä vasteen laskenta suoritetaan elementtimenetelmään pohjautuvalla Autodeskin Robot Structural Analysis 2016 -ohjelmalla. [6]

### 3. TEOLLISUUSRAKENNUSTEN VÄLIPOHJAT

#### 3.1 Yleistä

Värähtelyä aiheuttavat koneet ja laitteet pyritään yleensä asentamaan omille massiivisille koneperustuksilleen ja välittämään näin dynaaminen kuorma suoraan maapohjalle tai paaluperustukselle [6, s.230]. Teollisuusrakennuksissa tuotantotilat ovat pääosin yksikerroksisia ja välipohjien varaan sijoitetaan ainoastaan toimisto- ja aputiloja [19, s.11]. Käytettävä runkojärjestelmä riippuu kuitenkin tuotantotoiminnan vaatimuksista, minkä vuoksi teollisuusrakennukset ovat hyvin yksilöllisiä. Joidenkin teollisuuskoneiden tuotantoprosessi edellyttää runsaasti tilaa koneen alle. Esimerkiksi paperikoneiden tapauksessa muun muassa kuivatushuopien kierto sekä hylkymassan käsittely aiheuttavat tällaisen tilanteen. Tämän vuoksi konetta ei voida sijoittaa suoraan maaperän varaan rakennettavalle massiiviselle perustukselle vaan sijoitus on tehtävä ylemmälle konetasolle. Tällaistenkin koneiden tapauksessa ei koneen raskaimpia elimiä sijoiteta välipohjille, vaan koneen runko lepää koneen päästä päähän jatkuvien konepalkkien varassa, joita kannattelevat rakennuksen rungosta erillään olevat pilarit. Tämä käy ilmi myös kuvasta 9, jossa on esitetty leikkauspiirustus paperikoneen layoutista. [8]



**Kuva 9.** Paperikoneen kuivatussynterinin käyttölaitteet sijaitsevat välipohjalla (perustuu lähteeseen [8]).

Kuvaan on korostettu koneen kuivatussylinterin käyttö eli sähkömoottori, vaihde sekä kardaniakseli, jotka sijaitsevat selvästi suoraan betonisen välipohjalaatan varassa ilman maapohjaan tukeutuvaa laiteperustusta. Koska kone sijaitsee perustusta ylemmällä kone-tasolla, vaativat sen käyttö- ja kunnossapitotoimet välipohjien rakentamisen. Suuret teollisuuskoneet ja -laitteet tarvitsevat monia apulaitteita tuotantoprosessin aikaansaamiseksi kuten pumppuja, jauhimia, moottoreita ja puhaltimia [8]. Kun kone on perustettu ylemmälle tasolle, joudutaan tai halutaan etenkin näitä apulaitteita sijoittaa välipohjien varaan, jolloin myös välipohjarakenteen dynaaminen tarkastelu tulee välttämättömäksi, jotta rakenteen käyttökelpoisuudesta voidaan varmistua.

Yleisesti voidaan todeta, että välipohjalaatan varaan sijoitetaan vain tasaisesti käyviä ja laatan kantokykyyn soveltuvia dynaamisia kuormia aiheuttavia koneita ja laitteita. Tällöinkin Prakash ja Puri [7, s.394] suosittelevat värähtelyn lisävaimentamista sijoittamalla värähtelyä vaimentava kerros laiteperustuksen ja välipohjalaatan väliin. Mikäli laitteen ympäristö on hyvin värähtelyherkkä, suositellaan lisäksi laitteen tukemista esimerkiksi pehmeän teräs- tai kumijousipakan varaan.

## **3.2 Tyypilliset teollisuusrakennusten betonivälipohjat**

### **3.2.1 Vakiopaksuinen teräsbetonilaatta**

Tyypillisin paikallavalettu teräsbetonivälipohja on vakiopaksuinen pilarilinjoilta palkkien varaan tuettu betonilaatta. Halkeilemattomana se voidaan yleensä olettaa isotrooppiseksi laattarakenteeksi, joka käyttäytyy elastisen levyn tavoin. Rakenteen isotrooppisuudella tarkoitetaan, että sillä on identtinen käyttäytyminen sen kaikissa suunnissa. Kyseessä on idealisointi rakenteen todellisista fyysisistä ominaisuuksista, sillä todellisuudessa hyvin harva rakenne tai materiaali on täysin isotrooppinen. Tämä johtuu siitä, että useimpien materiaalien mikrorakenne koostuu hyvin erikokoisista partikkeleista, joiden suunta ja elastiset ominaisuudet saattavat lisäksi vaihdella. Tarkasteltaessa rakennetta suuremmassa mittakaavassa ja huomioiden, että mikrorakenne on sattumanvaraisesti jakautunut, voidaan materiaalin elastinen käyttäytyminen määrittää mikrorakenteiden elastisten ominaisuuksien keskiarvona, minkä kautta materiaali voidaan olettaa isotrooppiseksi. Tällainen oletus voidaan tehdä myös betonille. [20, s.19]

Isotrooppisella laattalla on samat materiaali- ja lujuusominaisuudet laatan kaikissa suunnissa. Sen taivutusjäykkyys lasketaan luvun 2 lauseen (31) mukaisesti. Mikäli laatan halkeilu tahdotaan mitoituksessa huomioida, on rakenteen taivutusjäykkyyttä pienennettävä, sillä halkeilun jälkeen ja ennen terästen myötöä laatta ei enää käyttäydy ideaalisen isotrooppisen levyn tapaan, koska halkeilutapa voi erota pituus- ja leveyssuunnassa [21]. Jos halkeilu huomioidaan, on rakenteen jäykkyys mahdollista laskea esimerkiksi interpolomalla halkeilleen ja halkeilemattoman poikkileikkauksen jäykkyyksien välillä [14, s.30].

Rasitustason ollessa korkea betonin materiaaliominaisuudet ovat vahvasti epälineaarisia. Epälineaarisuus voidaan huomioida betonirakenteiden värähtelyanalyysissä, jos rakenteen rasitustaso on liian korkea normaaliin lineaariseen analyysiin tai rakenteeseen vaikuttaa pakkovoimia. Kuitenkin tavallisesti värähtelyssä syntyvät jännitykset ovat niin pieniä, että voidaan käyttää normaalia lineaarista analyysia materiaaliominaisuuksien määrittelyyn. Betonin jännitys-muodonmuutosyhteys riippuu myös muodonmuutoksen nopeudesta. Tätäkään ei tavallisesti normaalissa betonirakenteiden värähtelyanalyysissä huomioida, mutta asia on hyvä tiedostaa. [14, s.27-28]

### 3.2.2 Alapuoletta palkeilla jäykistetty laatta

Monissa teollisuusrakennuksissa, kuten edellä myös kuvan 9 tapauksessa, välipohjalaatan taivutusjäykkyyttä on kasvatettu jäykistämällä laatta toisessa suunnassa laatan alapuolelle valettavilla jännevälillä suuntaisilla palkeilla. Rakennetta ei voida enää tarkastella isotrooppisena, koska sen taivutusjäykkyudet eroavat laatan pituus- ja leveysuunnassa. Kyseessä on tällöin niin sanottu ortogonaalisesti anisotrooppinen eli ortotrooppinen laatta [20, s.19]. Laatan elastiset ominaisuudet eroavat ainoastaan kahdessa toisiaan vastaan kohtisuorassa suunnassa, joten ortotrooppisuus voidaan kuvata kohtisuorien suuntien erisuuruuksina taivutus- ja vääntöjäykkyyksinä [20, s.62].

Yleisesti ortotrooppisuus voi aiheutua joko rakenteen geometriasta ja teknisistä ominaisuuksista tai sen materiaalin anisotrooppisuudesta. Materiaalista aiheutuvaa rakenteen ortotropiaa Troitsky [20, s.19] kutsuu luonnolliseksi ortotrooppisuudeksi. Geometriasta ja teknisistä ominaisuuksista aiheutuvan laattarakenteen matemaattista analysointia voidaan helpottaa korvaamalla alkuperäinen rakenne sitä vastaavalla luonnollisesti ortotrooppisena laattana. Laatta-jäykisteyhdistelmä korvataan siis vakiopaksumaisella laattalla, jolla on samat jäykkyysominaisuudet eri suunnissa kuin jäykistetyllä laattalla. Tällainen yksinkertaistus ei tietenkään voi täysin vastata todellisuutta, minkä vuoksi on toteutettava muutama oletus. Jäykisteiden jaon  $a_1$  tulee olla tarpeeksi pieni suhteessa laatan sivumittoihin, jotta voidaan varmistua jäykkyysominaisuuksien likimääräisestä homogeenisuudesta. Jäykkyysominaisuuksien myös oletetaan jakautuvan tasaisesti koko rakenteelle molemmissa suunnissa, eivätkä ne riipu laatan tuentatavasta tai poikittaisen kuorman jakautumisesta laatalle. Lisäksi oletetaan, että palkit ja laatta valmistetaan samasta materiaalista, ja että niiden välinen liitos on täysin jäykkä. [20, s.65]

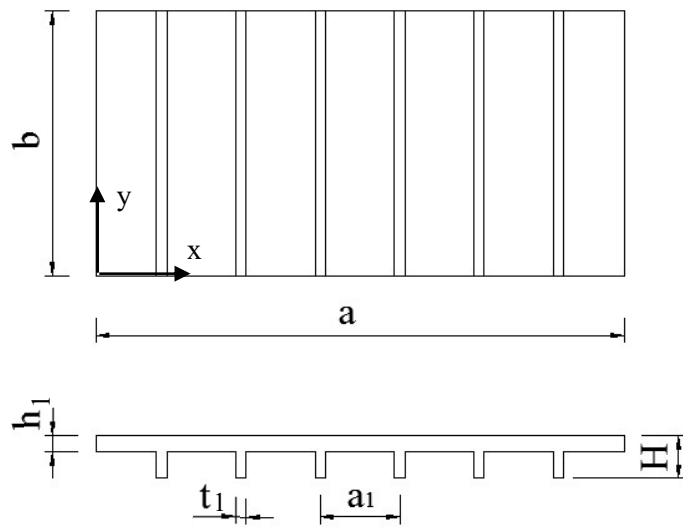
Ortotrooppisten laattojen teoria perustuu samoihin otaksumiin kuin isotrooppisen laattojen tapauksessa [33, s.95]. Tällöin on täysin vastaavasti kuin isotrooppiselle laatallekin johdettavissa ortotrooppisen laatan differentiaaliyhtälö

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 + \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y) \quad (46)$$



jossa vakiot  $D_x$  ja  $D_y$  ovat laatan taivutusjäykkyydet toisiaan vastaan kohtisuorissa suunnissa ja vakio  $D_{xy}$  laatan tehollinen vääntöjäykkyys. Näiden kaikkien ollessa yhtä suuret ( $D_x = D_y = D_{xy} = K$ ) yhtälö (46) palautuu aikaisemmin mainittuun isotrooppisen laatan yhtälöön.

Mikkolan [33, s.96] mukaan yhtälöä (46) voidaan käyttää myös sellaisten laattojen analysointiin, joissa rakenteen ortotropia aiheutuu rakenteellisista syistä. Tällöin taivutus- ja vääntöjäykkyydet on määritettävä rakenneominaisuuksien perusteella tai kokeellisesti. Seuraavaksi esitetään tarkemmin tässä työssä tutkittavien alapuolelta palkeilla jäykistettyjen laattojen jäykkyystermien määrittäminen. Näissä käytetään kuvan 10 mukaisia merkintöjä.



**Kuva 10.** Alapuolelta palkeilla jäykistetty laattarakenne

Kun rakenteen poikittaisen kokoonpuristuman vaikutus jätetään huomioimatta, voidaan Timoshenkon ja Woinowsky-Krigerin [22, s.369] mukaan rakenteen heikomman suunnan taivutusjäykkyys laskea kaavalla

$$D_x = \frac{E a_1 h_1^3}{12 \left( a_1 - t_1 + t_1 \left( \frac{h_1}{H} \right)^3 \right)} \quad (47)$$

jossa  $E$  on materiaalin kimmomoduuli. Betonille poikittaisen kokoonpuristuman vaikutus voidaan jättää huomioimatta, mutta esimerkiksi rakenteellisille metalliseoksille sen huomiotta jättäminen johtaa taivutusjäykkyyden merkittävään aliarviointiin [20, s.74]. Vahvemman suunnan taivutusjäykkyys määritetään kaavalla

$$D_y = \frac{E I_z}{a_1} \quad (48)$$

jossa  $I_z$  on sellaisen T-poikkileikkauksen neliömomentti, jonka laipan leveys on laatan jäykistepalkkien jakomitta  $a_1$ . Laatan tehollinen vääntöjäykkyys  $D_{xy}$  lasketaan kaavalla [22, s.369]

$$D_{xy} = \frac{Eh^3}{12(1 + \nu)} + \frac{C}{2a_1} \quad (49)$$

Lauseen (49) ensimmäinen termi kuvaa laatan vääntöjäykkyyttä ilman jäykisteitä ja jälkimmäinen termi yhden jäykisteen eli palkin vääntöjäykkyyttä. Lähteen [16] mukaan jäykistepalkin vääntöjäykkyys  $C$  määritetään lauseella

$$C = GI_v \quad (50)$$

jossa  $G$  on materiaalin liukumoduuli ja  $I_v$  jäykisteen vääntöjäyhyys. Vääntöjäyhyys voidaan laskea esimerkiksi Saint-Venantin likikaavan avulla, joka on [16, s.42]

$$I_v = \frac{A^4}{40I_p} \quad (51)$$

Kaavassa (50)  $A$  on poikkileikkauksen pinta-ala ja  $I_p$  sen polaarinen jäyhyysmomentti. Polaarinen jäyhyysmomentti voidaan suorakaidepoikkileikkaukselle laskea kaavalla

$$I_p = \frac{t_1 h_p^3 + t_2^3 h_p}{12} \quad (52)$$

jossa  $h_p$  on jäykisteen korkeus eli  $H - h_1$  [17]. Vääntöjäykkyyden laskenta kaavan (49) mukaisesti perustuu puhtaasti teoreettiseen tilanteeseen, joten tarkemmassa laskennallisessa analyysissä sen voidaan katsoa antavan ainoastaan ensimmäisen approksimaation vääntöjäykkyydelle [20, s.74].

### 3.3 Betonivälipohjan vaimennusominaisuudet

Vaimennus on matemaattisesti vaikeasti kuvattavissa oleva ilmiö [13, s.62]. Se on materiaalin tai rakenteen kykyä poistaa systeemistä värähtelyn aiheuttamaa mekaanista energiaa muuttamalla sitä esimerkiksi lämmöksi. Rakenteissa se aiheutuu pääasiassa rakennemateriaalien sisäisestä eli hystereesistä vaimennuksesta sekä energian absorboitumisesta esimerkiksi rakenteen liitoksissa tapahtuvan liukuman aiheuttaman kitkan kautta. Näin ollen koko rakenteen vaimennus on yleensä suurempi kuin pelkän materiaalin aiheuttama. Lisäksi rakenteeseen liittyvät ei-rakenteelliset elementit kuten kevyet väliseinät saattavat parantaa koko rakenteen kykyä vaimentaa energiaa. [3, s.164-165] [23, s.14]

Teräsbetonirakenteissa vaimennukseen vaikuttavat muun muassa betonin sisäiset ilmiöt, raudoitteiden tartuntaominaisuudet sekä voimakkaimmin rakenteen halkeilu [24, s.19]. Betonirakenteen mikrohalkeilun vaikutuksesta rakenteen vaimennusenergian

sitomiskyky paranee. Laattarakenteet halkeavat osin käyttörajatilan kuormituksilla, mutta halkeilun huomiotta jättäminen tuo luonnollisesti varmalla puolella olevan tuloksen. Mikäli halkeilu huomioidaan vaimennuskapasiteetin kasvuna, on myös huomioitava sen pienentävä vaikutus teräsbetonirakenteen jäykkyysominaisuuksiin.

Materiaalin vaimennus kuvataan prosentteina kriittisestä vaimennuksesta eli suhteellisena vaimennuskertoimena  $\xi$ , joka ilmaisee pienimmän havaittavissa olevan, ainoastaan sisäisistä energiahäviöistä aiheutuvan vaimennuksen määrän. Teräsbetonirakenteen suhteellisen vaimennuskertoimen arvo on määritettävissä dynaamisilla kuormituskokeilla, joissa tutkitaan rakenteen eri ominaistajuuksia vastaavan resonanssin terävyyttä [24, s.21]. Vaimennuskerroin voidaan selvittää myös mittaamalla vaimennetun systeemin värähtelyn peräkkäisten amplitudien arvot [5, s.382-383]. Tällöin vaimennus voidaan ilmaista logaritmisien dekrementin avulla kaavalla

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{u_0}{u_n} \quad (53)$$

jossa  $n$  on mitattujen värähdysten lukumäärä ja  $u_0$  sekä  $u_n$  ovat mitattujen alku- ja loppusivumispisteiden ordinaatat. Usealla mittauspisteellä saadaan kuvattua paremmin keskimääräistä vaimennuskykyä [25, s.16]. Logaritmisien dekrementin ja suhteellisen vaimennuskertoimen välillä on likimain yhteys

$$\xi \approx \frac{\delta}{2\pi} \quad (54)$$

Mittaustuloksina saadaan värähtelyn maksimiordinaatat, jotka eivät ole tarkalleen yhtä suuret kuin sivuamisordinaatat. Aiheutuva virhe on kuitenkin pieni, joten Salmen ja Virtasen [5, s.383] mukaan tuloksia voidaan käyttää vaimennuskertoimien arvoina.

Kuormituskokeiden toteuttaminen ei yleensä ole tarkoituksenmukaista tai mahdollista, joten vaimennusta pyritään arvioimaan kirjallisuudessa esitettyjen arvojen perusteella. Chopra [15, s.452-454] käsittelee vaimennusta maanjäristysten aiheuttamien värähtelyjen kannalta, joten esitetyt arvot vaimennukselle eivät suoraan sovellu normaalissa värähtelyn aiheuttamassa käyttörajatilassa käytettäväksi. Rakenteille sallitaan maanjäristysten yhteydessä huomattavia muodonmuutoksia, joiden esiintyessä rakenteen energian absorboimiskyky paranee. Chopra kuitenkin suosittaa hyvin raudoitetulle ja vähän halkeilleelle teräsbetonirakenteelle suhteellisen vaimennuskertoimen  $\xi$  arvoksi 2-3 %, kun rakenteen jännitys on korkeintaan puolet sen myötörajasta. Tällainen tilanne voidaan perustellusti olettaa olevan kyseessä värähtelyn käyttörajatila tutkittaessa. Kun rakenne on juuri myötörajan alapuolella täysin halkeilleessa tilassa, vaimennukselle voitaisiin käyttää niinkin korkeita arvoja kuin 7-10 %. Smith [6, s.144] mainitsee, että vaimennuksen arvioinnissa on hyvä olla konservatiivinen ilmiön monimutkaisuuden vuoksi, jotta värähtelyanalyysin tulokset ovat varmalla puolella. Näihin seikkoihin perustuen tässä työssä suhteellisen vaimennuskertoimen arvona käytetään 2 prosenttia.

Rakenteen vaimennusominaisuuksilla ei ole suurta vaikutusta impulssiherätteen esiintyessä, sillä lyhytkestoisen kuormituksen vaikutuksesta rakenne saavuttaa maksimivasteensa hyvin nopeasti, jolloin vaimennuksen arvon ollessa suhteellisen alhainen (alle 10 %) sen kautta poistuvan energian määrä on hyvin pieni. Chopran [15, s.155] mukaan suurimmalle osalle käytännön rakenteista impulssiherätteiden vaikuttaessa vaimennuksen vaikutus voidaan jättää huomiotta. Saavutettava lopputulos on varmalla puolella, mutta ei aiheuta kuitenkaan liiallista ylimitoitusta.

## 4. VÄRÄHTELY TEOLLISUUSRAKENNUKSISSA

### 4.1 Värähtelyn lähteet

Rakenteiden värähtely aiheutuu ajan funktiona muuttuvista dynaamisista kuormituksissa, joiden lähteinä kaiken kaikkiaan rakennuksissa ovat liikkuvat ihmiset, käyvät koneet ja laitteet, luonnonilmiöt kuten tuuli ja maanjäristykset, tie- ja raideliikenne, rakennustyöt sekä mahdolliset onnettomuudet kuten törmäykset ja räjähdykset [3, s.5-11]. Tässä työssä keskitytään teollisuusrakennusten välipohjarakenteisiin, joille merkittävimpiä värähtelyn aiheuttajia ovat pääsääntöisesti koneet ja laitteet riippuen siitä, minkälainen tuotantoprosessi on kyseessä, mikä on koneiden kunnossapidon tila, ja miten rakenteet on suunniteltu. Koneista aiheutuvan värähtelyn luonne määräytyy koneen tuottaman liikkeen perusteella, joka jaetaan yleensä kolmeen eri luokkaan: pyörivään, edestakaiseen ja iskevään liikkeeseen. Koneille on tyypillistä, että niiden aiheuttama dynaaminen kuormitus voidaan liikkeen säännöllisyyden vuoksi usein kuvata matemaattisesti jaksollisena funktiona, joissain tapauksissa jopa harmonisena. [3, s.45]

Rakennesuunnittelijan on tiedettävä, minkä tyyppisiä dynaamisia rasituksia kone aiheuttaa [25, s.8]. Käytännössä nämä tiedot tulisivat olla saatavissa koneiden valmistajilta ja toimittajilta, mutta diplomityön tilaajan käytännön kokemus on osoittanut, että monesti näin ei ole, minkä vuoksi suunnittelijan olisi kyettävä arvioimaan niitä. Tässä luvussa esitellään yksinkertaisten pyörivien, edestakaisin liikkuvien sekä iskevien koneiden tuottamia dynaamisia kuormituksia.

#### 4.1.1 Pyörivät koneet

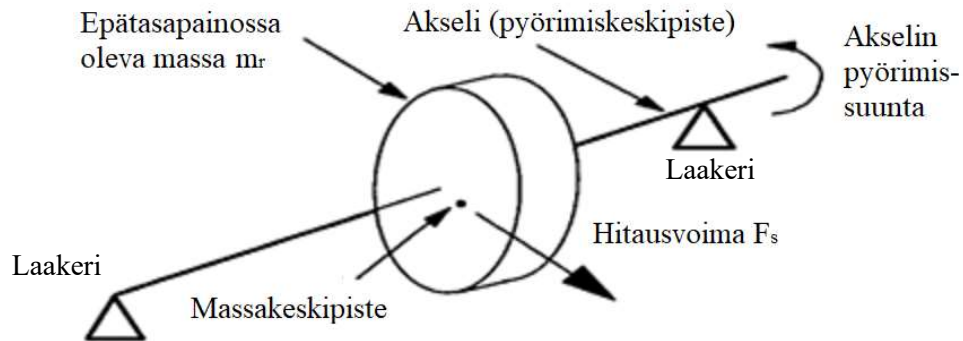
Yleisimpiä pyöriviä koneita teollisuudessa ovat esimerkiksi puhaltimet, keskipakopumput, pyörivät kaasua- ja höyryturbiinit, generaattorit, sähkömoottorit ja vaihteet [3, s.46]. Niiden aikaansaaman dynaamisen kuormituksen funktio ajan suhteen on harmoninen, jolloin siitä aiheutuvan voiman pystysuora komponentti voidaan kuvata sinimuotoisen funktion

$$F(t) = F_s \sin(\Omega t + \varphi_F) \quad (55)$$

avulla jokaisessa mielivaltaisessa suunnassa. Lauseessa (55)  $F_s$  on harmonisen kuormituksen maksimiampplitudi,  $\Omega$  pyörivän kappaleen kulmataajuus,  $t$  on aika ja  $\varphi_F$  pyörimisliikkeen vaihekulma. [7, s.201]

Pyörimisliikkeessä oleva massa ei itsessään aiheuta dynaamista kuormitusta, vaan kuormitus syntyy pääasiassa massan epäkeskisyydestä eli epätasapainosta pyörimisakselin suhteen [3, s.45-46]. Tätä on havainnollistettu kuvassa 11. Aiheutuva dynaaminen

kuormitus siirtyy rakenteille käytännössä kokonaan laakereiden välityksellä, joihin pyörivä akseli on kiinnitetty [26, s.10].



**Kuva 11.** Pyörivän massan aiheuttama hitausvoima, perustuu lähteeseen [26, s.5]

Täysin tasapainossa olevaa massaa ei todellisuudessa esiinny, vaan jokaisessa koneenosassa on valmistusepätarkkuuksien vuoksi aina lievää epätasapainoa. Epätasapaino saattaa aiheutua esimerkiksi pyörivän osan epätasaisen likaantumisen ja kulumisen seurauksena tai koneenosan alun perin riittämättömästä tasapainotuksesta. Massan epäkeskisyyden lisäksi koneen aiheuttama dynaaminen kuormitus voi olla seurausta kahden eri koneenosan, esimerkiksi telan ja vaihteen välisen liitoksen linjausvirheestä. Myös koneen laakerin vaurioituminen, osien mekaaninen väljyys tai koneen sisäinen resonanssi saattavat aiheuttaa värähtelyä. [27]

Määritettäessä koneen aiheuttamaa kuormitusfunktiota on selvittävä syntyvän hitausvoiman maksimiampplitudi  $F_s$ . Koneen valmistajan tulisi eurokoodin EN 1991-3 [28] mukaan toimittaa rakennesuunnittelijalle täydellinen selvitys eri mitoitusolanteissa vaikuttavista staattisista ja dynaamisista kuormista yhdessä koneen muiden tietojen, kuten koneen kuormituskäyrän, nopeuden sekä osien kriittisten pyörimisnopeuksien kanssa. Joissain tapauksissa konevalmistaja ilmoittaa ainoastaan osille sallitun epätasapainon maksimiarvon  $e_m$ . Tällöin kuvan 11 mukainen maksimiampplitudi voidaan eurokoodin [28] mukaan laskea kaavalla

$$F_s = m_r e_m \Omega^2 \quad (56)$$

jossa  $m_r$  on roottorin eli pyörivän kappaleen massa ja  $\Omega$  sen ominaiskulmataajuus yksikössä rad/s. Kulmataajuus on helposti laskettavissa, kun tiedetään pyörivän kappaleen halkaisija sekä koneen käyntinopeus.

Mikäli koneenvalmistaja ei ilmoita dynaamisen kuorman maksimiampplitudia eikä suurinta sallittua epätasapainoa, voidaan dynaamisen kuorman maksimiampplitudi laskea myös niin kutsuttujen tasapainotusluokkien (engl. Balance Quality Grade) avulla, jotka määritellään kansainvälisessä standardissa ISO 21940-11:2017 [29]. Standardin mukaan tasapainotusluokka riippuu koneen tyypistä ja se määritellään terminä  $e_m \Omega$  yksikössä mm/s. Arvot perustuvat kokemuseräiseen tietoon siitä, millä epäkeskisyydellä koneiden

toiminta pysyy tyydyttävällä tasolla. Taulukossa 1 on esitetty standardin mukaisia tasapainotusluokan arvoja tämän työn kannalta oleellisimmille konetyypeille.

**Taulukko 1.** Tasapainotusluokat (Balance Quality Grades)[29]

Konetyyppi	Tasapainotusluokka G	$e_m\Omega$ [mm/s]
Maatalouskoneet Käyttöakselit, esim. kardaaniakselit	G 16	16
Tuotantokoneet yleisesti Paperikoneet Puhaltimet Vaihteet Pumput Sähkömoottorit, nopeus < 950 rpm tai akselin halkaisija < 80 mm	G 6.3	6,3
Sähkömoottorit, nopeus > 950 rpm tai akselin halkaisija > 80 mm Kompressorit Kaasu- ja höyryturbiinit Tekstiilikoneet	G 2.5	2,5

Jos pyörivälle kappaleelle vaadittu tasapainotusluokka on esimerkiksi G 2.5, sallittu epäkeskisyys  $e_m\Omega$  on 2,5 mm/s. Valmistajan tarjoamien arvojen tai tasapainotusluokkien lisäksi dynaamisen kuorman maksimiampplitudi voidaan lähteen [26, s.11] mukaan määrittää myös kyseisessä lähteessä esitetyn empiirisen kaavan tai laakerivalmistajan tarjoaman laakerin tehollisen jäykkyyden kautta. Näitä menetelmiä ei käsitellä tarkemmin tässä työssä.

Joissain tapauksissa kaksi toisiaan vastaavaa pyörivää konetta yhtä suurella epätasapainolla on kytketty yhteiselle akselille, jolloin niiden pyörimisnopeus on sama. Tästä seuraava dynaamisen kuormituksen resultantti voidaan määrittää kolmen eri vaihtoehdon perusteella. Epäkeskiset massat voivat pyöriä samassa vaiheessa,  $180^\circ$  vaihekulman päässä toisistaan tai jossain vaihekulmassa siltä väliltä. Ensimmäisen vaihtoehdon tapauksessa seuraava kuormitus on suoraan kaksinkertainen lauseen (56) kuormitukseen verrattuna. Kun hitausvoimat ovat päinvastaisessa vaiheessa, kumoavat ne toisensa aiheuttaen kuitenkin epätasapainomomentin

$$M = m_r e_m \Omega^2 l_m \quad (57)$$

jossa  $l_m$  on massojen painopisteen välinen etäisyys. Kolmannessa tapauksessa syntyvät sekä momentti että resultanttivoima. Koneen perusrakenteen suunnittelussa tulisi

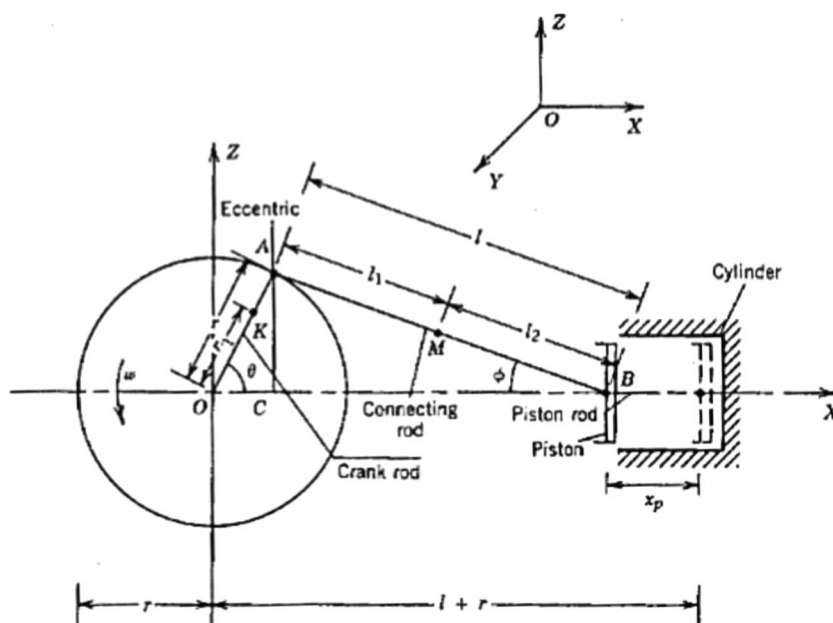
olettaa kaikkein kriittisimmän yhdistelmän vaikuttavan. Samalla akselille kiinnitettyjen useamman kuin kahden pyörivän massan liikkeestä aiheutuvat resultanttivoimat ja -momentit voidaan määrittää vastaavalla tavalla kuin edellä. [7, s.203-205]

Jos rakenne tai perustus tukee useita eri koneita tai sen osia, suunnittelijan tulisi selvittää harmoninen voima jokaiselle pyörivälle kappaleelle ja yhdistää näistä aiheutuvat vasteet kokonaisvasteen määrittämiseksi. [26, s.12] Aiheutuvien yksittäisten harmonisten voimien superponoinnista seuraava resultantti ei yleensä johda jaksolliseen kuormitukseen. Tällöin herätteen mallintaminen matemaattisesti monimutkaistuu [3, s.48]. Tilannetta käsitellä tässä tarkemmin.

#### 4.1.2 Edestakaisin liikkuvat koneet

Edestakaisin liikkuvat koneenosat tuottavat aina dynaamisen kuormituksen. Esimerkkejä edestakaisin liikkuvista koneista ovat mäntä- ja höyrykoneet, kutomakoneet sekä jotkin pumpit ja kompressorit. Ensisijaisesti tällaiset koneet tuottavat muuttuvan voiman koneen liikkeen suunnassa, mutta usein niistä aiheutuu myös pyörivän kuormituksen komponentti. Aiheutuva dynaaminen kuormitus on näiden kahden yhdistelmä. [3, s.50]

Yksinkertaisin ja yleisin esimerkki edestakaisin liikkuvasta koneesta on normaalin mäntäkoneen kampimekanismi sisältäen männän, sen varren, kiertokangen sekä kammen, joka on kiinnitetty kampiakselille. Mäntäkoneen avulla edestakainen liike on mahdollista muuttaa pyöriväksi ja päinvastoin. Yksinkertaisen mäntäkoneen toimintaperiaate on esitetty kuvassa 12. [7, s.189-190]



**Kuva 12.** Mäntäkoneen toimintaperiaate [7, s.190]

Koneen eri osille ominaiset liikkeet voidaan kuvailla siten, että mäntä ja sen varsi (piste B) liikkuvat edestakaisin x-akselilla, kun taas kammen AO eri pisteet käyvät läpi



pyörimisliikkeen pisteen O (kampiakseli) ympärillä kuvan 12 mukaisesti. Kiertokangen AB liike on näiden välimuoto, jossa sen piste A on täydellisessä pyörimisliikkeessä pisteen O ympärillä, piste B lineaarisessa edestakaisessa liikkeessä ja näiden väliset pisteet elliptisillä radoilla. Kun kammen oletetaan pyörivän vakiokulmanopeudella  $\omega_0$ , kuvan 12 mukaisilla merkinnöillä kammen pyörimisestä aiheutuva männän siirtymä  $x_p$  voidaan kirjoittaa [7, s.190-191]

$$x_p = \left( r + \frac{r^2}{4l} \right) - r(\cos \omega_0 t + \frac{r}{4l} \cos 2\omega_0 t) \quad (58)$$

missä  $l$  on kiertoakselin ja  $r$  kammen pituus. Lause (58) osoittaa, että männän liike on jaksollista, mutta ei välttämättä harmonista. Jälkimmäisen termin suuruus riippuu kammen ja kiertoakselin välisestä suhteesta, joten mikäli kiertoakselin pituus suhteessa kampeen on suuri, jää jälkimmäisen termin vaikutus männän liikkeeseen olemattomaksi ja männän liikettä voidaan käsitellä harmonisena. Männän kiihtyvyys saadaan sen siirtymän toisena derivaattana, joka on [7, s.192]

$$\ddot{x}_p = r\omega_0^2(\cos \omega_0 t + \frac{r}{l} \cos 2\omega_0 t) \quad (59)$$

Kun merkitään edestakaisin liikkuvaa massaa termillä  $m_{rec}$  ja pyörivää massaa termillä  $m_{rot}$ , voidaan männän liikkeen suuntaan aiheutuva dynaaminen kuormitus kirjoittaa dynamiikan peruslain kautta

$$F_x = (m_{rec} + m_{rot}) r\omega_0^2 \cos \omega_0 t + m_{rec} \frac{r^2\omega_0^2}{l} \cos 2\omega_0 t \quad (60)$$

ja liikkeen suuntaa vastaan kohtisuoraan aiheutuva kuormitus

$$F_z = m_{rot} r\omega_0^2 \sin \omega_0 t \quad (61)$$

Edestakaisin liikkuvaan massaan  $m_{rec}$  huomioidaan männän massa sekä yleensä 1/3 kiertoakselin massasta ja sen oletetaan olevan keskittynyt pisteeseen B (kuva 10). Pyörivä massa  $m_{rot}$  taas sisältää loput kiertoakselin massasta lisättynä kammen massa. [26, s.13]

Usein mäntäkoneista aiheutuvia dynaamisia voimia voidaan pienentää niin kutsutulla vastatasapainotuksella [7, s.194]. Koneen valmistaja voi hävittää pyörivän massan  $m_{rot}$  aiheuttama dynaamisen voiman komponentin lisäämällä pyörimisliikkeeseen pyörivän massan suuruisen vastapainon, joka vaikuttaa 180° vaihekulman päässä oikeasta pyörivästä massasta. Tällöin syntyy päinvastainen keskipakovoima, joka kumoaa oikean keskipakovoiman. Näin lauseen (61) mukainen liikettä vastaan kohtisuorassa oleva voiman komponentti  $F_z$  tulee nolaksi ja liikkeen suuntainen voiman komponentti saa muodon

$$F_x = m_{rec} r \omega_0^2 \cos \omega_0 t + m_{rec} \frac{r^2 \omega_0^2}{l} \cos 2\omega_0 t \quad (62)$$

On myös mahdollista hävittää tai pienentää x-suuntaista liikettä vastaavaa voimaa asentamalla kammelle vastapaino. Tämä kuitenkin kasvattaa jälleen suunnan z voimaa. Tästä syystä on mahdotonta hävittää kokonaan yksisylinterisen mäntäkoneen epätasapainovoimia. Monisylinterisille koneille, joissa useita mäntiä sijaitsee yhteisellä kampiakselilla, tämä kuitenkin on teoreettisesti mahdollista valmistajan toteuttamalla mäntien ja sylinterien sopivalla järjestelyllä. Monisylinteristen koneiden aiheuttamien dynaamisten kuormitusten laskenta on monimutkaisempaa, sillä syntyviin kuormituksiin vaikuttavat osien massa ja tahti, mäntien sijoittelu, kiertokankien koko, kampien vaihekulmat sekä vastapainojen massat ja sijoittelu. Tästä syystä koneen valmistajan tulisi tarjota suunnittelijalle käytettäväksi aiheutuvat dynaamiset kuormat. Kirjallisuudessa on esitetty menetelmiä voimien arvioimiseksi, mutta niitä ei käsitellä tässä työssä tarkemmin. [7, s.195] [26, s.14]

### 4.1.3 Iskevät koneet

Monet teollisuusprosessit edellyttävät käytettäviltä koneilta iskevää liikettä tuotteen valmistamiseksi. Esimerkiksi konevasaroiden sekä muotti- ja takomapuristimien toiminta perustuu säännöllisten iskujen tai sysäysten tuottamiseen laitteen eri osien välillä, jolloin niistä aiheutuu suuria lyhytkestoisia dynaamisia kuormituksia. Tällaisten transienttien kuormitusten tapauksessa syntyvän impulssiherätteen todellinen muoto riippuu paitsi koneen tuotantotavasta, myös prosessoitavan materiaalin muokkaantumisoimaisuuksista. [3, s.53-54]

Konevasarojen ja takomapuristimien tuottama kuormitusfunktio on yleensä transienttia, jota ei voida kuvata minkään jaksollisen kuormitusfunktion avulla, kun taas esimerkiksi muottipuristimien tapauksessa koneissa on vähintäänkin joitain säännöllisesti värähteleviä osia [3, s.53]. Verrattuna todelliseen transienttiin kuormitukseen, tällaisissa koneissa aiheutuva dynaaminen kuormitus sisältää jaksollisesti toistuvan huippuarvon, jota seuraa vaikutuksenalaisen rakenteen vapaan värähtelyn vaimeneminen. Tällaiset epäharmonisetkin jaksolliset kuormitukset voidaan purkaa Fourier-analyysillä useaan harmoniseen komponenttiin. [3, s.45] Impulssiherätteen aiheuttama vaste jaetaan yleensä kuormitusvaiheeseen, joka vastaa voiman vaikutusaikaa, ja kuormittamattomaan vaiheeseen, jossa voima ei enää vaikuta ja systeemi värähtelee vapaasti. Monien koneiden tapauksessa kuormitusvaiheessa syntyvä värähtely ei kuitenkaan kuormittamattomassa vaiheessa ehdi koneiden tiheän iskunopeuden takia vaimenevaan iskujen välillä pois. [3, s.53-54]

Aiheutuva dynaaminen kuormitus voidaan kuvata iskun keston, sen liikemäärän, iskun nousuajan ja voiman huippuarvon kautta. Näiden parametrien yhdistelmä määrittää kuormitusfunktion muodon, joka voi olla minkälainen tahansa, esimerkiksi puolisiin-, kolmio- tai suorakaidemuotoinen. Tyypillisesti iskun kesto aika on hyvin lyhyt, mikä aiheuttaa

merkittävien kuormituskomponenttien jakautumisen laajalle taajuuskaistalle verrattuna harmoniseen kuormitukseen, jossa värähtelyenergia keskittyy yksittäisille taajuuksille. Lyhytkestoinen impulssi herättää enemmän resonanssitaajuuksia kuin pitkäkestoinen, sillä taajuuskaistan leveys riippuu kääntäen verrannollisesti kuormituksen vaikutusajan pituudesta. [3, s.54-55]

Tuotettu iskuenergia siirtyy vastaanottavan osan välityksellä rakenteelle [26, s.5]. Osavalla konesuunnittelulla rakenteelle siirtyvää voimaa voidaan vähentää koneen sisässä esimerkiksi iskevää voimaa kumoavalla vastaiskurilla [3, s.53]. Menetelmää, jolla voitaisiin määrittää kaikenlaisten iskevien koneiden sysäysvoimasta ja sen muutoksesta ajan suhteen perustukselle aiheutuva kuormitus, ei ole olemassa [7, s.205]. Värähtelyanalyysiin vaadittavat kuormitukset voidaan kuitenkin tapauskohtaisesti selvittää mittauksin. Tiedot tulisivat olla saatavissa koneen valmistajalta, joka huomioi koneen kaikkien osien vaikutuksen dynaamisten voimien kehittymiseen. [26, s.15]

Esimerkkitapauksena impulssiherätteen tuottavista koneista käsitellään tässä työssä tarkemmin konevasaroita. Niiden toiminta tapahtuu siten, että koneen iskurille annetaan liike-energiaa joko ulkoisen voimanlähteen kuten höyryn avulla tai tavallisemmin painovoiman kautta pudottamalla iskuri esimerkiksi kuumennetun metallin päälle, jolloin se pakotetaan muotin mukaiseen muotoon. Iskuenergia on tarkoitus käyttää materiaalin muokkaukseen, mutta merkittävä osa siitä siirtyy koko koneelle ja rakenteelle. Koska iskun vaikutuksesta koko kone liikkuu alaspäin, voidaan sitä käsitellä yksinkertaisena tukirakenteensa päällä värähtelevänä massana. Systeemin tulisi olla hyvin vaimennettu, jotta aiheutuva värähtely häviää ennen seuraavaa iskua [6, s.205] [26, s.5].

Kun painovoimaisen iskurin potentiaalienergian oletetaan muuttuvan sen liike-energiaksi, voidaan energian säilymislain kautta iskunopeus juuri ennen vaikutusta lausua

$$v_r = \sqrt{2gh_0} \quad (63)$$

missä  $h_0$  on iskurin pudotuskorkeus. Pneumaattisesti tai höyryvoimaisesti kiihdytetyn iskukappaleen nopeutta tulisi kokemuksen perusteella pienentää kertoimella 0,65, jotta kitkan ja höyryn vastuksen aiheuttama energian poistuminen huomioidaan [6, s.235]. Tyyppillisesti konevasaroiden iskutahtina on 40-100 iskua minuutissa ja iskunopeus on suurusluokassa 7,6 m/s. Iskevän voiman suuruus voi olla jopa 150 kN. [26, s.5]

Iskukappaleen vaikutusnopeuden ollessa tiedossa, voidaan Yhdysvaltojen betonitutkimuslaitoksen (ACI) ohjeen [26, s.15] mukaan koko systeemin nopeutta vaikutuksen jälkeen arvioida kaavalla

$$v_h = \frac{M_r}{M_h} (1 + \alpha_h) v_r \quad (64)$$

missä  $M_r$  on iskukappaleen massa sisältäen muottikappaleet ja muut liitännäiset,  $M_h$  on koko koneen massa ja  $\alpha_h$  on iskurin palautusvakio, joka kokemuksen perusteella on 60 % monille iskurikoneille. Jälkivaikutusnopeutta  $v_h$  voidaan käyttää analysoitaessa koneen perustusta jäykkänä yhden vapausasteen systeeminä alkunopeudella  $v_h$ . On myös todennäköistä, että koneen iskuri vaikuttaa alasimeen epäkeskisesti, jolloin tästä aiheutuvan pyörimisliikkeen komponentti on huomioitava [6, s.236].

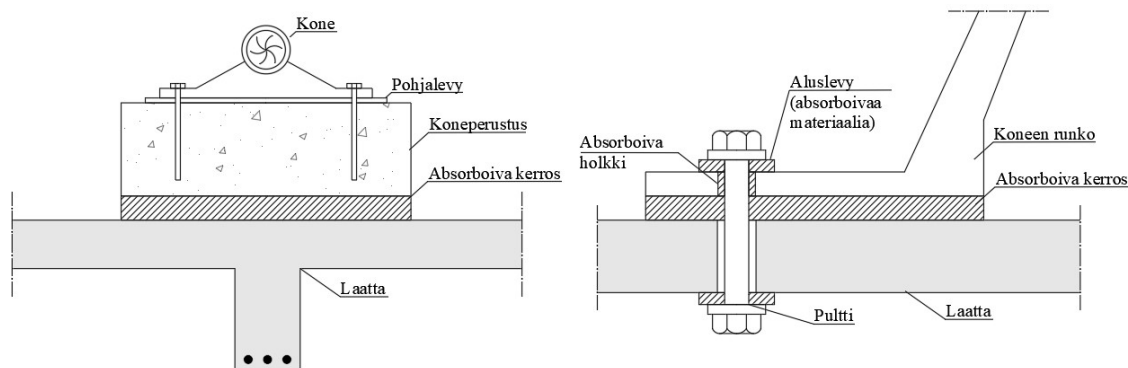
## 4.2 Teollisuusvälipohjien värähtelysuunnittelu

Perinteisesti rakenteiden värähtelymitoitus on suoritettu suunnittelemalla rakenteen ominaisuudet niin, ettei resonanssia pääse syntymään. Menetelmää kutsutaan yleisesti viritämiseksi (engl. frequency tuning) [3, s.58]. Ainoastaan silloin, kun rakenteen virittämiseen on liittynyt epävarmuutta, on selvitetty systeemin pakkovärähtelyn vaste. Tilanne on voinut tulla kysymykseen esimerkiksi silloin, kun rakenteen ominaisuuksien muutokset resonanssin välttämiseksi ovat aiheuttaneet vaikeasti toteutettavissa olevia tai epätaloudellisia rakenneratkaisuja, tai mikäli herätteen taajuusjakauma on ollut suuri, jolloin on jouduttu sallimaan resonanssin osuminen jollekin rakenteen hallitsevista ominaistaajuuksista. Prakash ja Puri [7, s.8] mainitsevat, että *koneperustusten* dynaamisessa mitoitustilanteessa on tarkistettava sekä resonanssin välttäminen että vasteen amplitudien pysyminen sallituissa rajoissa. Koneita kannattavan välipohjan katsotaan tässä kuuluvan koneperustuksiin.

Kun koneita asennetaan välipohjalle, on varmistuttava, ettei niiden tuottama liike johda välipohjan tai koko rakennuksen liialliseen värähtelyyn. Mikäli kone on pakollista näin sijoittaa, suunnittelijan tulisi Prakashin ja Purin [7, s.394] mukaan käsitellä seuraavia asioita:

- a) Välipohjarakenteen ominaistaajuuden on oltava kaukana koneen tuottaman herätteen taajuudesta, jotta resonanssin syntyminen estetään (virittäminen).
- b) Kehittyvän vasteen amplitudit on tarkistettava perusteellisella analyysillä.
- c) Koneen ja välipohjan väliin tulisi asentaa värähtelyä vaimentava kerros
- d) Koneen sijaitessa värähtelyherkässä ympäristössä se tulisi asentaa pehmeiden tärä- tai kumijousien varaan.
- e) Betonivälipohja on suojattava kemiallista räsytystä vastaan esimerkiksi koneiden öljyvuodon varalta.

Kuvassa 13 on esitetty tapoja eristää värähtelyä välipohjarakenteesta. Koneperustuksen alle voidaan asentaa esimerkiksi kumista valmistettu värähtelyä absorboiva peti ja välipohjaan asennettavien kiinnikkeiden välityksellä siirtyvää värähtelyä pienentää kuvan mukaisilla kumiholkeilla, jotka asennetaan kiinnikkeiden ympärille. Värähtelyjen lisävaimennusta ei tässä työssä käsitellä tarkemmin, mutta rakenteen massan ja jäykkyyden muutosten osoittautuessa vaikeasti toteutettavaksi voi se joskus tarjota ratkaisun värähtelyongelmien hallintaan. [7, s.399]



**Kuva 13.** Esimerkkejä värähtelyn eristämisestä välipohjarakenteesta (perustuu lähteeseen [7, s.394]).

Asennettaessa kone pehmeiden teräs- tai kumijousipakkojen varaan koneen rungon olisi oltava tarpeeksi jäykkä, jotta koneen yksittäisissä tukipisteissä vaikuttavat erisuuruiset liikkeet jakautuvat riittävän tasaisesti sen koko pohja-alalle. Koneesta aiheutuvan värähtelyn ei tulisi myöskään olennaisesti muuttua koneen käytön aikana, koska jouset voidaan suunnitella vain tietynlaisella värähtelyllä. Tällaisen värähtelyn eristämiskäytännön suunnittelu toteutetaan yleensä konevalmistajan toimesta ja sen etuna ovat vaihdettavuus ja muunneltavuus, mikäli eristäminen osoittautuu tehottomaksi. [3, s.63]

Varsinainen välipohjarakenteen värähtelymitoitus tapahtuu siis selvittämällä rakenteen ominaistajuuDET ja siihen syntyvä vaste. Eurokoodi EN 1991-3 [28] velvoittaa suunnittelijaa mallintamaan koneen ja rakenteen muodostaman värähtelevän järjestelmän siten, että herätteet, massat, jäykkyysominaisuudet sekä vaimennus huomioidaan riittävän tarkasti todellisen dynaamisen toiminnan määrittämiseksi. Rakenne tulee suunnitella resonanssin ulkopuolelle ja tarkistaa myös kehittyvä vaste, sillä resonanssissakin vasteen raja-arvot voivat täyttyä, mikäli dynaamisen kuorman maksimiampplitudi ei ole suuri, ja toisaalta vasteen raja-arvot voivat ylittyä, vaikka resonanssia ei esiintyisikään. Virittämistä ja vasteen selvittämistä käsitellään seuraavaksi.

#### 4.2.1 Rakenteen viritys

Rakenteen virityksessä sen ominaisuudet suunnitellaan siten, että ominaistajuus tai -taajuudet jäävät kauas rakennetta kuormittavan dynaamisen herätteen taajuuksista, jolloin ehkäistään resonanssin syntyminen [3, s.59]. Sen suorittamiseksi suunnittelijan on tiedettävä herätteen kulmataajuus tai -taajuudet sekä rakenteen hallitsevat ominaistajuudet, joilla tarkoitetaan niitä värähtelyn ominaismuotoja, joissa suurin osa rakenteen massasta osallistuu värähtelyyn. Tämän voidaan olettaa toteutuvan, kun ominaismuotoihin osallistuvien massojen osuus on 90 % rakenteen kokonaismassasta tutkittavissa suunnissa [30, s.572].

Rakenteen ominaistajuus voidaan luonnollisesti suunnitella joko herätteen taajuuden ala- tai yläpuolelle. Tällä tavoin jaotellen rakenteita kutsutaan ala- ja yläviritteisiksi.

Alavirityksessä periaatteina Bachmannin ja Ammannin [3, s.62] mukaan on, että koneen käyntitaajuus on suurempi kuin 4-6 Hz, rakenteen ylemmät ominaismuodot eivät yhydy herätteen hallitseviin ominaismuotoihin, ja koneen kiihdytys- ja jarrutusvaiheissa ei aiheudu liiallisia värähtelyitä, kun ohitetaan rakenteen hallitsevat ominaistajuuudet. Kuten aikaisemmin on mainittu, laattarakenteet ovat jatkuvia värähtelysteemejä, joilla on käytännössä ääretön määrä ominaistajuuksia ja -muotoja. Tästä syystä alaviritteisten rakenteiden suunnittelu voi osoittautua ongelmalliseksi, joten yleensä tehokkaampi tapa toteuttaa taajuussäätö on suunnitella rakenteen alin ominaistajuus korkeammaksi kuin herätteen ylin taajuuskomponentti, kun herätteenä on harmoninen heräte. Käytännössä tämä tarkoittaa jäykkien rakenteiden suunnittelua [6, s.8]. Myös eurokoodissa EN 1990 [2, s.96] mainitaan, että rakenteen tai rakenneosan värähtelyn käyttörajatilan ylittämisen välttämiseksi rakenteen ominaistajuus olisi pidettävä rakennuksen toiminnasta ja värähtelylähteestä riippuvan arvon *yläpuolella*.

Kun rakenteeseen vaikuttaa impulssiheräte esimerkiksi iskevien koneiden tapauksessa, yläviritys voi tuottaa ongelmia, sillä kuten edellä mainittiin, lyhytkestoinen impulssi herättää taajuuksia laajemmalla kaistalla kuin yksittäisillä taajuuksilla operoivat harmoniset herätteet. Bachmann ja Ammann [3, s.65] suosittelevatkin, että iskevien koneiden perustukset tulisi suunnitella alaviritteisinä. Laattarakenteiden tapauksessa tämä voi kuitenkin tuottaa vaikeuksia johtuen joillekin laattarakenteille syntyvistä useista matalista hallitsevista ominaistajuuksista, jolloin voidaan olettaa joidenkin ominaismuotojen osuvan herätteen taajuusalueelle ja resonanssin tapahtuvan. Kuitenkin useimmiten suurin osa massasta on värähtelyliikkeessä rakenteen perusominaistajuudella, jolloin vähintään se tulisi suunnitella impulssiherätteen taajuusalueen alapuolelle. Tällaisessa tapauksessa värähtelyongelmien välttämiseksi ei todennäköisesti voida varmistua ilman vasteen tarkempaa analyysiä.

Ominaistajuuden ja herätteen taajuuden välisen taajuussuhteen sallitulle arvolle ei ole olemassa yhtä oikeaa arvoa. Esimerkiksi Smith [6, s.253] mainitsee, että dynaamisesti kuormitetun koneperustuksen ominaistajuuden tulisi olla vähintään puolet pienempi tai kaksi kertaa suurempi kuin sitä kuormittavan herätteen taajuuden, kun taas esimerkiksi ACI:n ohjeessa [26, s.22] mainitaan, että monet suunnittelutoimistot edellyttävät ainoastaan 20-33 % eroa taajuuksissa, joskus jopa pienempiä arvoja. Kun analyysiin liittyy epävarmuutta, on parempi käyttää konservatiivisempia arvoja [3]. Olennaista on huomioida kaikki rakenteen ominaismuodot, vaikka ylemmillä ominaismuodoilla resonanssitilanteessa syntyvä vaste jääkin pienemmäksi johtuen pienemmästä värähtelyyn osallistuvasta massasta [4].

## 4.2.2 Dynaamisen vasteen laskenta

Dynaamisen vasteen selvittämiseksi on toteutettava rakennesysteemin analyysi pakkovärähtelyssä [3, s.65]. Kuten tämän työn teoriaosuudessa huomattiin, tällaisen laskennan suorittaminen on matemaattisesti huomattavasti haastavampaa kuin pelkästään rakenteen

ominaistaajuuksien selvittäminen vapaan värähtelyn kautta, joten vasteen analyysi tehdään yleensä tietokoneavusteisesti tai vahvasti yksinkertaistetuilla menetelmillä. Laskentaan liittyy usein suurta epävarmuutta johtuen erityisesti rakenteen vaimennusominaisuuksien määrittämisen sekä koneen aiheuttaman dynaamisen kuorman todellisen vaikutuksen selvittämisen haastavuudesta. Välipohjalaattojen vasteen analyysi harmonisen herätteen vaikuttaessa voidaan toteuttaa esimerkiksi elementtimenetelmän avulla, jossa jatkuva rakennesysteemi muutetaan diskreetiksi jakamalla se solmupisteiden avulla pienempiin elementteihin. Tässä diplomityössä vasteen laskenta toteutetaan Autodeskin Robot Structural Analysis 2016 -ohjelmalla, jossa laskenta perustuu nimenomaan elementtimenetelmään. Muiden kuin harmonisen herätteen aiheuttaman vasteen laskentaan työssä ei paneuduta tarkemmin.

Häiriötilanteen voidaan katsoa aiheutuvan, kun välipohjarakenteeseen syntyvä liike ylittää sallitut värähtelytasot. Ne voidaan ilmaista joko rakenteen hetkellisenä siirtymänä, nopeutena tai kiihtyvyytenä. Huomioitavaa on, että suurin värähtely ei välttämättä esiinny rakenteen perusominaistaajuudella tai koneen operoimalla taajuudella, vaan sellaisella korkeammalla taajuusalueella, jossa nämä kaksi yhtyvät. Siirtymävastetta käytetään erityisesti vakiotilan värähtelyjen värähtelytasojen arviointiin. Sallittavia dynaamisen vasteen arvoja esitetään seuraavassa. Niiden kautta voidaan arvioida suunnitelmien tai olemassa olevan rakenteen muutostarvetta. [3, s.56-57]

### **4.3 Dynaamisen vasteen raja-arvot**

Rakenteen on pystyttävä rajoittamaan aiheutuvaa värähtelyä sekä siitä syntyviä sisäisiä kuormia ja jännityksiä värähtelyn aiheuttajan ympäristössä, jotta niistä ei aiheudu haittaa ihmisille, koneille tai muille rakenteille [26, s.19]. Rakenteisiin aiheutuvan lasketun tai mitatun värähtelyn hyväksyttävyyttä on käytännön rakennesuunnittelussa kyettävä joillain keinoilla arvioimaan. Tämän vuoksi pakkovärähtelyn vasteelle on määritetty raja-arvoja, jotka voidaan asettaa joko rakenteiden toiminnan ja turvallisuuden, rakennuksen käyttäjille sallittavan värähtelyn tai teollisen tuotannon ja koneen toiminnan häiriintymisen estämisen kautta. Mitoitusperuste määräytyy pääasiassa rakennuksen käyttötarkoituksesta, ja suunnittelijan on sovittava se yhdessä rakennuksen tilaajan tai käyttäjän kanssa. Sallittavien värähtelyjen raja-arvojen asettaminen koneille ja etenkin ihmisille on hankalaa, sillä vain harvoissa tapauksissa yleiset raja-arvot edustavat jokaisessa tilanteessa hyväksyttäviä rajoja. Rakenteellisen kestävyyskannalta yleistys on hieman helpommin toteuttavissa. Seuraavassa käsitellään rajoja erityisesti teollisuuskohteiden kannalta. [3, s.67]

#### **4.3.1 Betonirakenteille sallittava värähtely**

Rakenteiden toiminnan kautta värähtelylle asetettava käyttöraja-tila muodostuu harvoin mitoittavaksi tapaukseksi, sillä betonirakenteet sietävät huomattavasti suurempaa

värähtelyä kuin mitä koneiden ja ihmisten häiriintymiseen vaaditaan. Hyväksyttäviä raja-arvoja arvioitaessa on huomioitava muun muassa rakenteen rakennemateriaali ja sen laatu, rakennustapa, rakennuksen ikä, värähtelyn kesto ja luonne [3, s.68]. Koneiden aiheuttaman värähtelyn vaikutukset näkyvät rakenteissa joko kuormankantokyvyn heikkenemisenä tai rakenteen käyttörajatilan ylittymisenä. Kuormankantokyky voi heiketä värähtelyn aiheuttaman betonirakenteen halkeilun tai betoniterästen väsymisen myötä. Pitkäaikaisen syklisen rasituksen seurauksena betonirakenteeseen syntyy pysyviä muodonmuutoksia betonin mitoituspuristuslujuuden 0,6-0,7 -kertaisella jännitystasolla, jolloin rakenteeseen syntyy halkeamia. Betoniterästen väsyminen aiheutuu vastaavasta syklisestä rasituksesta ja sen myötä teräksen lujuus heikkenee. Kuormankantokyvyn aleneminen voi tapahtua myös rakenteen paikallisen plastisoitumisen seurauksena tai suurinopeudellisen kuorman vaikutuksesta, jolloin kuorman hyvin lyhyt nousuaika aiheuttaa korkean jännitysasteen. Vain hyvin harvoissa tapauksissa etenkin koneiden aiheuttama värähtely kuitenkin johtaa betonirakenteiden romahtamiseen. Käyttörajatilan ylittyminen taas sisältää värähtelystä aiheutuvan ei-rakenteellisten elementtien vaurioitumisen kuten väli-seinien halkeamisen. [3, s.5-6] [25]

Betonirakenteiden vaurioitumisriskiä arvioitaessa tärkein suure taajuuden tai amplitudin sijaan on VTT:n [14, s.8] mukaan kappaleen hetkellinen nopeus, ja useiden eri tutkimusten perusteella vaurioitumisrajana voidaan pitää nopeutta 50 mm/s. Lähteessä [3, s.71] esitetään, että hetkellisen nopeuden rajana tulisi teollisuusrakennusten teräsbetonirakenteissa pitää taajuusalueella 10-30 Hz hetkellistä nopeutta 12 mm/s ja alueella 30-60 Hz nopeuksia 12-18 mm/s, josta väliarvot interpoloidaan.

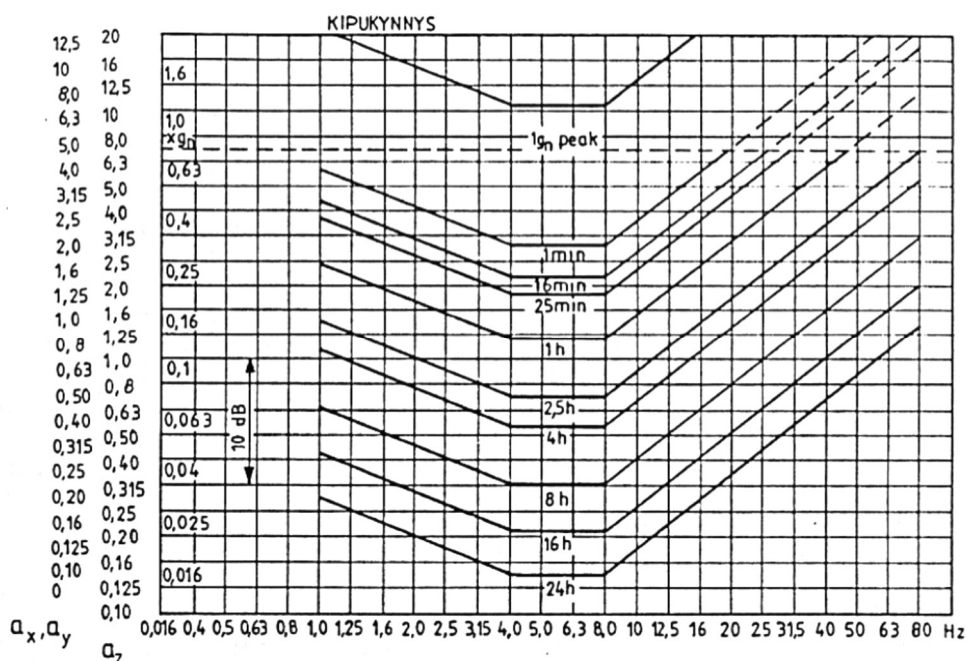
### 4.3.2 Ihmisille sallittava värähtely

Ihminen aistii värähtelyn hyvin herkästi ja se koetaan häiritseväenä ja epämiellyttävänä [3, s.73]. Kaikkein helpoimmin ihmiskeho tunnistaa värähtelyn tuntoaistin kautta liikkeenä, mutta myös värähtelyn aikaansaamien ääniaaltojen liikkeestä ilmassa tai rakenteissa aiheutuva melu sekä näkyvä liike rakenteissa ja tavaroissa koetaan häiritseväenä. Hankalaa ihmisten havaitseman värähtelyn raja-arvojen asettamisesta tekee se, että ihmisten reagointi värähtelyyn on hyvin yksilöllistä ja riippuu lisäksi olosuhteista. Esimerkiksi ihmisen asennolla suhteessa värähtelyn aiheuttajaan, värähtelyn kestolla sekä värähtelyn odotettavuudella kyseisessä tilanteessa on suuri merkitys. Tästä syystä yleistä raja-arvoa, joka soveltuisi kaikkiin tilanteisiin, ei voida asettaa, vaan arvot riippuvat värähtelyn kestosta, taajuudesta, rakennuksen käytöstä sekä kellonajasta (yö vs. päivä). Taajuusalue 4-8 Hz koetaan kaikkein häiritsevämmäksi, sillä monet ihmisen sisäelimestä resonoivat tällä alueella [23, s.22]. Koska teollisuusrakennuksissa värähtely on usein odotettavissa, voidaan sallittava värähtelytaso asettaa yleensä korkeammaksi kuin asuinrakennuksissa. Esimerkiksi Bachmannin ja Ammannin [3, s.76] mukaan teollisuudessa ihmisten kannalta sallittava värähtely on noin kolminkertainen verrattuna pysyvässä asuinkäytössä olevaan rakennukseen.



Pitkään jatkuvan värähtelyn tiedetään lisäävän ihmisen väsymistä ja huomiointikyvyn heikkenemistä sekä aiheuttavan päänsärkyä ja pahoinvointia. Pitkäaikainen voimakas koko ruumiin värähtely voi jopa tuottaa terveysriskin erityisesti ristiselän alueen selkärangassa ja siihen liittyvässä hermostossa. Voimakkaalla värähtelyllä voi myös olla haitallisia vaikutuksia ihmisen ruuansulatus-, genitaali- ja virtsajärjestelmiin tai naisten hedelmällisyyteen. Vakaviin terveysvaikutuksiin vaaditaan kuitenkin yleensä vuosia kestänyt altistuminen voimakkaalle värähtelylle. [6, s.293] [23, s.24]

Ihmisten kokemalle värähtelylle on asetettu useita suositeltavia raja-arvoja ja ne voidaan määrittellä joko värähtelyn amplitudin, nopeuden tai kiihtyvyyden kautta [3, s.73]. Tässä työssä esitellään standardissa ISO 2631-1 käsitelty menetelmä sekä usein käytössä oleva niin kutsuttu mukautettu Reiher-Meister -kuvaaja [26, s.21-22]. ISO 2631-1:n kuvaaja on esitetty kuvassa 14. Siinä värähtelylle sallittava maksimikiihtyvyys määritetään värähtelyn taajuuden ja sen keston kautta. Standardin mukaiset rajat perustuvat ihmisten mukavuuteen, työntehoon ja terveyteen. Värähtelyn tunteminen riippuu siinä neljästä tekijästä: värähtelyenergian määrästä, sen taajuudesta, suunnasta sekä kestosta. Kiihtyvyys on ilmaistu suureella RMS (Root Mean Square), joka tarkoittaa kiihtyvyyden neliöllistä keskiarvoa. Ilmoittamalla kiihtyvyys RMS:n avulla epäsäännöllisen värähtelyn yksittäisellä kiihtyvyyden huippuarvolla ei ole liian suurta vaikutusta rakenteen mitoittamiseen. [25, s.23]

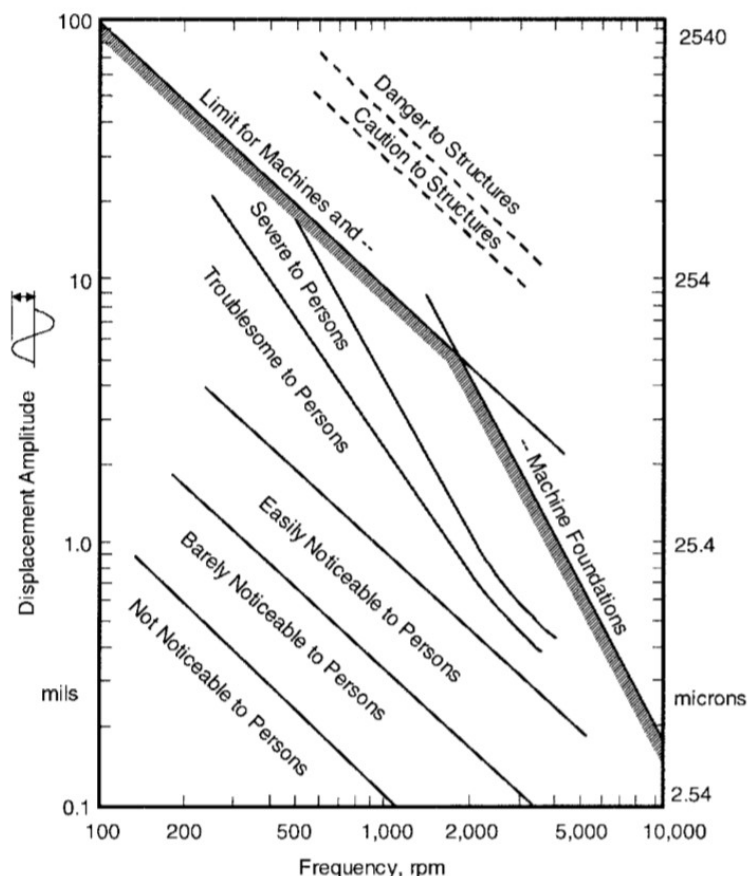


**Kuva 14.** ISO 2631-1:n värähtelyrajat ihmisten alenevalle työteholle. [25, s.24]

Kuvaajasta voidaan havaita rajojen tiukentuminen aikaisemmin mainitulla ihmisille haitallisella 4-8 Hz:n taajuusalueella. Arvot on määritetty tilanteelle, jonka ylittämisen jälkeen ihmisten työteho voidaan katsoa alentuvan. Värähtelyä voidaan standardissa arvioida myös ihmisten mukavuustason tai sieto- ja kipukynnyksen kautta. Mukavuusraja

saadaan jakamalla kuvan 14 käyrien arvot luvulla 3,15, sietoraja kaksinkertaisena kuvaajan arvoihin verrattuna ja kipukynnys nelinkertaisena. Kuvaajan mukaiset arvot on lisäksi määritetty sekä pysty- että vaakasuuntaiselle kiihtyvyydelle. Ihmisen tuntemalle värähtelylle poikittainen suunta on pystysuuntaa herkempi, joten esimerkiksi makaavalle ihmiselle voidaan soveltaa kuvan 14 mukaisia kiihtyvyyksien  $a_x$  ja  $a_y$  arvoja. [25, s.23-24]

Kuva 15 esittää mukautettua Reiher-Meister kuvaajaa [26, s.21]. Siinä sallittu värähtely ilmaistaan siirtymän maksimiamplitudin avulla herätteen pyörimisnopeuden funktiona. Kuvaajassa määritellyt rajat perustuvat Reiherin ja Meisterin vuonna 1931 julkaisemiin tutkimuksiin ihmisten sietämien värähtelyn rajoista, johon on sittemmin lisätty raja koneille ja koneperustuksille sekä rakenteille. Ihmisten kokema värähtely on esitetty viiden eri käyrän rajaamalla alueella ei-havaittavissa olevasta värähtelystä vakavanlaatuiseen, kun henkilö seisoo lähellä värähtelevää konetta. Raja koneille ja koneperustuksille kuvaa rajaa turvallisuudelle, eikä se näin ollen suoraan sovellu rajaksi varmistamaan koneiden oikeaa toimintaa. [7, s.5-6]



**Kuva 15.** Rajat ihmisten kokemalle värähtelylle teollisuudessa (Reiher-Meister –kuvaaja). [26, s.22]

Kun teollisuudessa herätteen aiheuttava laite sijaitsee rakennuksen sisällä, voidaan henkilöstölle sallittava värähtelytaso koneen vakiotilan värähtelyssä arvioida tämän kuvaajan kautta. Hyväksyttävänä tasona voidaan pitää, kun rakenteen vasteen siirtymäamplitudi jää jokaisessa suunnassa alueen ”troublesome to persons” alapuolelle [31, s.54]. Kuvaaja

soveltuu myös rakenteiden kestävyysarvioimiseen ja kuvaajassa esitetty alue ”danger to structures” vastaa hyvin pitkälti VTT:n [14] esittämää raja-arvoa 50 mm/s betonirakenteiden vaurioitumisnopeudelle.

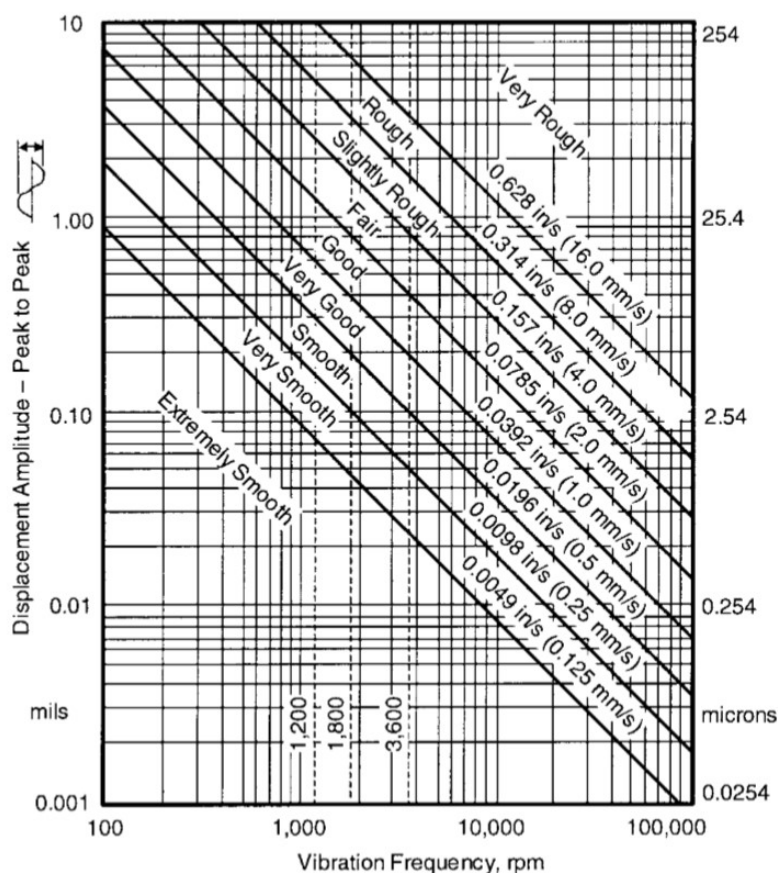
### 4.3.3 Koneille sallittava värähtely

Teollisuusrakennuksissa raja-arvot värähtelyn vaikutuksille on yleensä asetettava valmistettavan tuotteen laatuun, koneiden oikeaan toimintaan ja koneen mekaaniseen kestävyysperustuen. Värähtelyn vaikutukset koneissa näkyvät ongelmina konerakenteen materiaaleissa, kuten muodonmuutoksina, osien väsymisenä ja lujuuden heikentymisenä sekä valmistettavan tuotteen laadun heikentymisenä [13, s.11]. Kuten ihmisten sietämän värähtelyn tapauksessa, myös koneille on mahdotonta asettaa täysin kattavia värähtelyrajoja, vaan ne riippuvat hyvin pitkälti tuotantoprosessista. Tästä syystä suunnitteluohjeissa esitettävät arvot ovat joko vahvasti yleistettyjä tai niitä voidaan käyttää vain tarkkaan rajatuissa tilanteissa. [3. s.83]

Pyöriville koneille värähtelyn raja-arvot perustuvat hetkellisten siirtymien ja nopeuksien rajoittamiseen koneiden laakereissa, sillä laakereissa esiintyvä voimakas värähtely pienentää laitteiden kunnossapitovälejä ja saattaa johtaa ennen aikaiseen laakerivaurioon. Vaurioiden estämiseksi pyörivät koneet sisältävät usein turvakyttimeitä, jotka reagoivat liialliseen värähtelyyn ja pysäyttävät koneen. Edestakaisin liikkuvat koneet sietävät yleensä enemmän värähtelyä kuin pyörivät koneet, mutta samalla ne myös tuottavat suurempia dynaamisia voimia. Värähtelyrajat voivat siis olla edestakaisin liikkuville koneille korkeampia. Iskeville koneille taas ei ole yleensä määritetty erityisiä värähtelyrajoja. Niille on tärkeää tiedostaa ero laitteen sisällä syntyvien ja perustussysteemin värähtelyjen välillä, sillä laitteen sisäiset voimat voivat aiheuttaa suuria kiihtyvyyksiä ja rasituksia, jotka eivät kuitenkaan siirry rakenteille. [26, s.19]

Koneen toimittajan tai valmistajan tulisi tarjota koneille sallitun värähtelyn raja-arvot rakennesuunnittelijan käytettäväksi. Joissain tapauksissa myös rakennushankkeen tilaajalla saattaa olla omia kokemuksella tai erillisillä värähtelymittauksilla hankittuja ja hyväksi todettuja värähtelyrajoja. Kun raja-arvoja ei ole tarjolla, voi suunnittelija ACI:n [26] mukaan käyttää koneperustusten suunnittelussa esimerkiksi standardissa ISO 20816-1:2017 [32] ja sen lisäosassa ISO 10816-3 asetettuja yleisiä raja-arvoja, tai Baxterin ja Bernhardin koneiden värähtelyille määrittelemiä yleisiä raja-arvoja. Näistä käsitellään tässä työssä tarkemmin vain jälkimmäisenä mainittu. Koneille sallittavat värähtelytasot perustuvat kokemukseräiseen tietoon joko koneiden vaurioiden rajoittamisesta tai oikean toiminnan takaamisesta. Vaikka rajat on tarkoitettu koneperustuksille, käytetään niitä tässä diplomityössä välipohjille sallittavien värähtelyrajojen arviointiin, sillä näille ei ole olemassa omia yleisiä värähtelyrajoja. Käytettävät rajat soveltuvat pyörivien ja edestakaisin liikkuvien koneiden värähtelyn hyväksyttävyyden arviointiin, mutta harvemmin iskeville koneille. [26, s.19]

Kuvassa 16 on esitetty mainittu Baxterin ja Bernhardin mukainen mitoituskäyrästä koneiden värähtelylle. Siinä raja-arvot koneille sallitulle värähtelylle ilmaistaan vasteen siirtymäamplitudin avulla koneen pyörimisnopeuden funktiona. Eri värähtelytasot on esitetty käyrien väliin jäävillä yhdeksällä alueella erittäin tasaisesta värähtelystä todella epätasaiseen, joten sallittava värähtelytaso riippuu asetettavasta laatutasosta. Kuvaajassa nähtävät raja-arvokäyrät edustavat tiettyä värähtelyn nopeusvastetta. Diplomityön tilaajan kokeemukseen perustuen mitoittavana rajoina on pidetty alueita *good* tai *very good*, jolloin esimerkiksi näistä jälkimmäisen tapauksessa värähtelyn ylärajana on nopeusvasteen arvo 1,0 mm/s. Tällöin herätteen käyntinopeudella 1200 rpm värähtelyn siirtymävasteen rajana olisi noin 20 µm. [26, s.21]



**Kuva 16.** Yleiset raja-arvot koneiden värähtelylle (Baxter & Bernhard) [26, s.21]

Käytettävä värähtelyraja perustuu yleensä kokemuseräiseen tietoon tai toteutettuihin värähtelymittauksiin [26, s.19]. Kohdeyrittäjien käyttämien mitoitusrajojen soveltuvuutta voidaan arvioida esimerkiksi koneiden herkkyyssluokkien kautta, joihin teollisuuskoneet joskus ryhmitellään sen mukaan, miten paljon ne sietävät värähtelyä. Esimerkiksi lähde [3, s.84] jaottelee koneet neljään luokkaan I-IV, joista luokka I omaa tiukimmat vaatimukset. Näihin perustuen taulukossa 2 on esitetty kutakin herkkyyssluokkaa vastaava kuvan 16 mukainen rajakäyrä sekä esimerkkejä luokkaan sisällytettävistä koneista.

**Taulukko 2.** Koneiden herkkyysluokat lähteen [3, s.84] mukaan

	Kone tai laite esimerkiksi	Herkkyysluokka	Raja-arvo $v_{\max}$ [mm/s]	Vastaava värähtely- taso
I	Optiset instrumentit, mittalaitteet, tarkkuusleikkurit, tasapainotuskoneet, laitehallinta-asemat	Korkea	0,1	<i>Extremely smooth</i>
II	Tehdaskoneiden hammasrattaat ja laakerit	Normaali	1,0	<i>Very good</i>
III	Metallintyöstökoneet, painokoneet	Matala	4,0	<i>Fair</i>
IV	Puhaltimet, sähkömoottorit, tarkkuusporat, puristimet	Hyvin matala	>4,0	<i>Slightly rough</i>

Bachmannin ja Ammannin [3, s.84] mukaan taajuusalueella 1-10 Hz mitoittavana suurena tulisi hetkellisen nopeuden sijaan käyttää kappaleen kiihtyvyyttä, joka saadaan kertomalla nopeuden rajat termillä  $2\pi f$ . Taulukon luokka II sisältää teollisuuskoneiden laakerit vastaten nopeuden arvoa 1,0 mm/s. Tämä tukee kuvan 16 alueen *very good* käyttämistä mitoituksen ylärajana, kun värähtelyn haitallisuutta arvioidaan esimerkiksi paperikoneen toiminnan kannalta. Muun tyyppisille koneille voidaan mahdollisesti käyttää suurempia rajoja. Prakash ja Puri [7, s.8] mainitsevat, että kuvan 16 värähtelyrajat vastaavat pitkälti Reiher-Meister -kuvaajan (kuva 15) arvoja. Näin ollen Baxterin ja Bernhardin kuvaajan mukaan asetettavien värähtelyrajojen voidaan katsoa olevan soveltuvia myös koneiden käyttäjien ja tehdasrakennuksen henkilöstön sietämälle värähtelylle.

## 5. LAATTOJEN OMINAISTAAJUUKSIEN LASKENTA

Rakenteen ominaistaajuuden laskennallinen arviointi muodostaa keskeisen osan värähtelyn vaikutuksen selvittämisestä, sillä kuten edellä on mainittu, rakenteiden värähtelysuunnittelussa tulisi pyrkiä välttämään resonanssi. Parhaimmassa tapauksessa pelkällä ominaistaajuuden ratkaisemisella pystytään varmistumaan, ettei värähtely aiheuta kyseiseen rakenteeseen ongelmia, eikä muuta arviointia värähtelyn osalta tarvita [26, s.22]. Tässä luvussa käsitellään aikaisemmin esiteltyjen yleisimpien välipohjarakenteiden ominaistaajuuden määrittämistä. Ominaistaajuudet on yleensä ratkaistava joko matemaattisesti yksinkertaistetuilla likiratkaisuilla tai tietokoneavusteisesti, sillä laattarakenteiden värähtelytehtävän tarkka ratkaisu johtaa yleisimmissä tapauksissa huomattaviin matemaattisiin vaikeuksiin [13, s.239].

Luvussa 2 esitettiin matemaattisesti analyyttinen tapa ratkaista neljältä reunaltaan vapaasti tuetun suorakaidelaatan ominaistaajuudet käyttämällä hyväksi Navierin ratkaisua suorakaidelaatan differentiaaliyhtälölle. Monille reunaehdoille vastaavaa matemaattisesti yksinkertaista ratkaisua ei ole mahdollista saada aikaan, jolloin ominaistaajuudet on ratkaistava likimenetelmin. Näitä likimenetelmiä on löydettävissä rakenteiden dynamiikkaa käsittelevästä kirjallisuudesta yleisesti levy- ja laattarakenteille tarkoitettuna. Tässä työssä käsitellään tarkemmin Robert D. Blevinsin laattarakenteille lähteeseen [17] kokoomia likikaavoja, joiden avulla ominaistaajuudet voidaan ratkaista sekä iso- että ortotrooppiselle laattarakenteelle.

Tietokoneavusteisen laskennan kehittyminen on mahdollistanut monien sellaisten monimutkaisten dynamiikan ongelmien ratkaisemisen, jotka ennen sitä olivat matemaattisesti lähes mahdottomia [20, s.368]. Nykypäivän rakennesuunnittelutyössä käytössä ovatkin usein elementtimenetelmään perustuvat laskentaohjelmistot, joilla myös on mahdollista ratkaista laattarakenteiden ominaistaajuudet. Likikaavojen lisäksi tässä luvussa lasketaan laattarakenteiden ominaistaajuuksia tietokoneavusteisesti Autodeskin Robot Structural Analysis 2016 -ohjelman moodianalyysillä. Moodianalyysillä ratkaistaan teoriaosuudessa suorakaidelaatan pakkovärähtelyn yhteydessä esitetty usean vapausasteen värähtelysystemin ominaisvärähtelyn liikeyhtälöstä seuraava ominaisarvotehtävä, jonka ratkaisuna rakenteen ominaistaajuudet ovat. Tietokoneavusteisen laskennan ja likimenetelmien välillä suoritetaan vertailu ja havainnoidaan, saadanko eri menetelmillä toisiaan vastaavia tuloksia. Ominaistaajuudet lasketaan muutamalle yleisimmälle tuentatapaukselle.



3		$\lambda_{ij}^2 \approx \pi^2 \sqrt{i^4 + \left(\frac{a}{b}\right)^4 G_j^4 + 2i^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 [J_j + 2\nu(H_j - J_j)]}$ <table><tr><td><math>G_i = i</math></td><td><math>J_i = i^2</math></td><td><math>H_i = i^2</math></td></tr><tr><td><math>G_1 = 0</math></td><td><math>J_1 = 0</math></td><td><math>H_1 = 0</math></td></tr><tr><td><math>G_2 = 0</math></td><td><math>J_2 = 1,216</math></td><td><math>H_2 = 1,248</math></td></tr><tr><td><math>G_3 = 1,506</math></td><td><math>J_3 = 5,017</math></td><td><math>H_3 = 1,506</math></td></tr><tr><td><math>G_k = k - \frac{3}{2}</math></td><td><math>J_k = \left(k - \frac{3}{2}\right)^2 [1 + 6((k - \frac{3}{2})\pi)^{-1}]</math></td><td></td></tr><tr><td><math>k = 4,5 \dots</math></td><td><math>H_k = \left(k - \frac{3}{2}\right)^2 [1 - 2((k - \frac{3}{2})\pi)^{-1}]</math></td><td></td></tr></table>	$G_i = i$	$J_i = i^2$	$H_i = i^2$	$G_1 = 0$	$J_1 = 0$	$H_1 = 0$	$G_2 = 0$	$J_2 = 1,216$	$H_2 = 1,248$	$G_3 = 1,506$	$J_3 = 5,017$	$H_3 = 1,506$	$G_k = k - \frac{3}{2}$	$J_k = \left(k - \frac{3}{2}\right)^2 [1 + 6((k - \frac{3}{2})\pi)^{-1}]$		$k = 4,5 \dots$	$H_k = \left(k - \frac{3}{2}\right)^2 [1 - 2((k - \frac{3}{2})\pi)^{-1}]$	
$G_i = i$	$J_i = i^2$	$H_i = i^2$																		
$G_1 = 0$	$J_1 = 0$	$H_1 = 0$																		
$G_2 = 0$	$J_2 = 1,216$	$H_2 = 1,248$																		
$G_3 = 1,506$	$J_3 = 5,017$	$H_3 = 1,506$																		
$G_k = k - \frac{3}{2}$	$J_k = \left(k - \frac{3}{2}\right)^2 [1 + 6((k - \frac{3}{2})\pi)^{-1}]$																			
$k = 4,5 \dots$	$H_k = \left(k - \frac{3}{2}\right)^2 [1 - 2((k - \frac{3}{2})\pi)^{-1}]$																			
4		$\lambda_{ij}^2 \approx \pi^2 \sqrt{G_i^4 + \left(\frac{a}{b}\right)^4 G_j^4 + 2\left(\frac{a}{b}\right)^2 [J_i J_j + 2\nu(H_i H_j - J_i J_j)]}$ <p><math>G_i, H_i, J_i</math> kohdasta 1 <math>G_j, H_j, J_j</math> kohdasta 2</p>																		
5		$\lambda_{ij}^2 \approx \pi^2 \sqrt{i^4 + G_j^4 \left(\frac{a}{b}\right)^4 + 2j^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 J_j}$ <p><math>G_i, H_i, J_i</math> kohdasta 2 <math>G_j, H_j, J_j</math> kohdasta 3</p>																		

Neljältä reunalta vapaasti tuetulle laatalle kaava (65) palautuu analyyttiseen luvussa 2 esitettyyn muotoon. Muille tuentatapauksille taulukon 3 laskentakaavat antavat likimääräisen tuloksen. Kohdissa 3-4 on huomioitava, onko tuettu reuna sivumittaa  $a$  vai  $b$  vastaava. Muille kuin taulukossa 3 esitetyille reunaehdoille ominaistajuuden vakio voidaan määrittää lähteen [17] mukaisesti.

### 5.1.2 Alapuolelta palkeilla jäykistetty laatta

Kuten aikaisemmin on mainittu, toiseen suuntaan jäykistetty laattarakenne voidaan kuvata ortotrooppisen laatan mallin mukaisesti, jolla on laatan kohtisuorissa suunnissa toisistaan eroavat taivutusjäykkyydet. Ortotrooppisen laattarakenteen värähtelyanalyysi ja ominaistajuuksien selvittäminen monimutkaistuvat verrattuna edellä esitettyyn isotrooppiseen suorakaidelaataan. Jäykistettyjen laattarakenteiden värähtelyn tutkimiseen on esitetty kirjallisuudessa useita eri menetelmiä, mutta analyysin monimutkaisuuden vuoksi ei mikään niistä ole täydellisesti kattava, eikä yleistä ratkaisua kaikille erilaisille jäykistetyille rakenteille ole olemassa. Tavallisin ratkaisutapa jäykistetyille laatoille on muuntaa ne vastaavaksi luonnollisesti ortotrooppiseksi laataksi, jolloin isotrooppisen laatan laskentatekniikat ovat soveltaen käytettävissä myös jäykistetyille laatalle. [20, s.359]



Blevins [17] esittää ominaistaajuudelle laskentakaavan, joka yleisessä muodossaan soveltuu useille erilaisille ortotrooppisen mallin mukaisille laattarakenteille. Se on ilmaistu muodossa

$$f_{ij} = \frac{\pi}{2\sqrt{m}} \sqrt{\frac{G_i^4 D_x}{a^4} + \frac{G_j^4 D_y}{b^4} + \frac{2(H_i H_j D_{xy} + 2D_k (J_i J_j - H_i H_j))}{a^2 b^2}} \quad (66)$$

missä vakiot  $G_i, H_i, J_i, G_j, H_j$  ja  $J_j$  riippuvat reunaehdoista ja ovat taulukon 3 mukaiset. Alapuolelta palkeilla jäykistetyille betonilaatalle jäykkyysstermit  $D_x, D_y$  ja  $D_{xy}$  voidaan laskea luvussa 3 esitetyin tavoin. Termi  $D_k$  on laatan vääntöjäykkyys, joka Slizardin [39, s.376] mukaan alapuolelta palkeilla jäykistetyn laatan tapauksessa sisältyy teholliseen vääntöjäykkyyteen  $D_{xy}$ . Useimmilla lattiarakenteilla rakenteen tehollinen vääntöjäykkyys on Ohlssonin [34, s.73] mukaan lähes vastaava kuin heikomman suunnan taivutusjäykkyys  $D_x$ . Tutkittaville alapuolelta palkeilla jäykistetyille laattarakenteille tehdään tämä oletus. Kun oletetaan lisäksi termin  $D_k$  sisältyvän teholliseen vääntöjäykkyyteen, kaava (66) voidaan kirjoittaa yksinkertaisemmassa muodossa

$$f_{ij} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{D_x}{m a^4}} \sqrt{G_i^4 + G_j^4 \left(\frac{a}{b}\right)^4 \frac{D_y}{D_x} + 2H_i H_j \left(\frac{a}{b}\right)^2} \quad (67)$$

Myös kaavoissa (66) ja (67) on taulukon 3 mukaisissa tuentatapauksissa 3-5 huomiotava, onko tuettu reuna sivumittaa  $a$  vai  $b$  vastaava.

## 5.2 Ominaistaajuuksien laskenta

Seuraavassa lasketaan kahden teräsbetonisen välipohjalaatan ominaistaajuudet edellä esitetyillä laskentakaavoilla (65) ja (66/67) sekä tietokoneavusteisesti Robotin moodianalyysillä. Moodianalyysin toteuttamiseksi Robot määrittää rakenteelle massa- ja jäykkyysmatriisit. Käyttäjän on ohjelmassa valittava laskennassa käytettävä massamatriisityyppi, ratkaisualgoritmi sekä algoritmin ratkaisemiseen käytettävä menetelmä. Rakenteen vaiennusta ei huomioida ominaisarvojen laskennassa. [35]

Tutkittavana rakenteena on erään teollisuusrakennuksen ulkomitoiltaan ja rakenneratkaisultaan hyvin tavanomainen teräsbetonirakenteinen välipohja. Välipohjalaatta tukeutuu teräsbetonisiin primääripalkkeihin, jotka edelleen tukeutuvat teräsbetonipilareihin. Rakennuksen pilarijako on 6,6 metriä ja primääripalkkien jako 5,8 metriä, joita käytetään välipohjalaattojen ulkomittoina tarkasteltaessa rakennetta vain yhdeltä pilari- ja jänneväliltä. Välipohjaa tutkitaan kahdella eri rakennevaihtoehdolla, jotka ovat vakiopaksuinen, isotrooppiseksi oletettava 300 mm laatta sekä alapuolelta palkeilla jäykistetty laatta. Alapuolelta palkeilla jäykistetyn laatan palkkien jako on 1,65 metriä, yläpuolisen laatan korkeus 110 mm, palkkien leveys 250 mm sekä korkeus laatan alapinnasta 750 mm.

Isotrooppisen laatan taivutusjäykkyys lasketaan kaavalla (31) ja ortotrooppisen laatan jäykkyystermit luvun 3.2 mukaisesti. Tutkittavien välipohjien ominaisuudet on koottu taulukkoon 4.

**Taulukko 4.** Tutkittavien välipohjarakenteiden ominaisuudet

Ulkomitat		Materiaaliominaisuudet	
Pilarijako (laatan leveys) $a$ [m]	6,6	Betonin kimmomoduuli $E_{cm}$ [GPa]	33
Laatan jänneväli $b$ [m]	5,8	Betonin tilavuuspaino $\gamma$ [kg/m <sup>3</sup> ]	2500
		Betonin suppeumaluku $\nu$	0,2
Jäykistetty laatta		Vakiopaksuinen laatta	
Laatan paksuus $h_1$ [mm]	110	Laatan paksuus $h$ [mm]	300
Laattapalkkien jako $a_1$ [mm]	1650	Laatan paino $\bar{m}$ [kg/m <sup>2</sup> ]	750
Palkkien korkeus $h_p$ [mm]	750	Laatan jäykkyys $K$ [kNm]	77340
Palkkien leveys $t_1$ [mm]	250		
Laatan paino $\bar{m}$ [kg/m <sup>2</sup> ]	559		
Jäykkyys $D_x$ suunnassa a [kNm]	4310		
Jäykkyys $D_y$ suunnassa b [kNm]	520490		

Välipohjalle ei oleteta laatan oman painon lisäksi muuta kuormaa, vaikka todellisuudessa myös herätteen aiheuttaman koneen massa sekä osa hyötykuormasta tulisi lisätä kokonaiskuormaan. Kuten aikaisemmin tässä työssä on mainittu, massan lisäys laskee laatan ominaistajuuksia, minkä vuoksi hyötykuorman arvioinnissa värähtelytarkastelua suoritettaessa on oltava konservatiivinen [4, s.20]. Välipohjarakenteiden ominaistajuuksien laskentamenetelmiä läpikäydessä tällä ei ole merkitystä, mutta suunnittelijan on tiedostettava asia käytännön värähtelymitoituksen kannalta.

### 5.2.1 Vapaasti tuetut laatat

Taulukossa 4 esitettyjen suorakaidelaattojen kymmenen alinta ominaistajuuksia ja ominaismuotoa selvitetään kaikille taulukossa 3 esitetyille reunaehdoille sekä Blevinsin mukaisin likikaavoin (65) ja (66) että Robotin moodianalyysillä. Rakenne mallinnetaan Robot- ohjelmaan kuorimallina, jossa rakenne on jaettu suorakulmion muotoisiin laattaelementteihin 0,1 metrin elementtijaolla. Moodianalyysin massamatriisina käytetään jatkuvaa massamatriisia ja ratkaisualgoritmina aliavaruusiterointia. Lisäksi moodianalyysin yhteydessä suoritetaan Sturmin testi, joka varmistaa, ettei ominaisarvoja jää havaitsematta. Vastaavaa mallinnus- ja ratkaisumenetelmää käytetään kaikille tutkittaville tapauksille.

Tarkastellaan ensimmäiseksi laattarakenteita kaikilta neljältä reunaltaan nivelellisesti tuettuna, jolloin laatan reunoilla ei esiinny taivutusmomenttia eikä siirtymää. Tällöin

ortotrooppiselle laatalle laskentakaavoissa käytettävät reunaehtojen mukaiset vakiot määritetään taulukon 3 kohdan 1 mukaisesti. Vakiokorkuiselle laatalle kummallakin laskentamenetelmällä saadut ominaistajuudet sekä tulosten eroavaisuus toisistaan prosentteina on esitetty taulukossa 5. Taulukosta myös käy rakenteessa esiintyvien puolialtojen lukumäärän kautta ilmi, mikä ominaismuoto on kyseessä millekin lasketulle taajuudelle. Lisäksi taulukkoon on kirjattu jokaisen ominaismuodon moodimassa, joka kertoo värähtelyyn osallistuvan massan prosentteina kokonaismassasta. Nämä arvot on saatu Robot-ohjelman moodianalyysin tuloksena. Moodimassan arvon kautta nähdään, mitkä tutkituista ominaismuodoista ovat hallitsevia ja näin värähtelyanalyysin kannalta olennaisia. Taulukkoon on korostettu punaisella kaikki ne tulokset, jotka ylittävät 5 prosentin eron eri menetelmien välisissä tuloksissa.

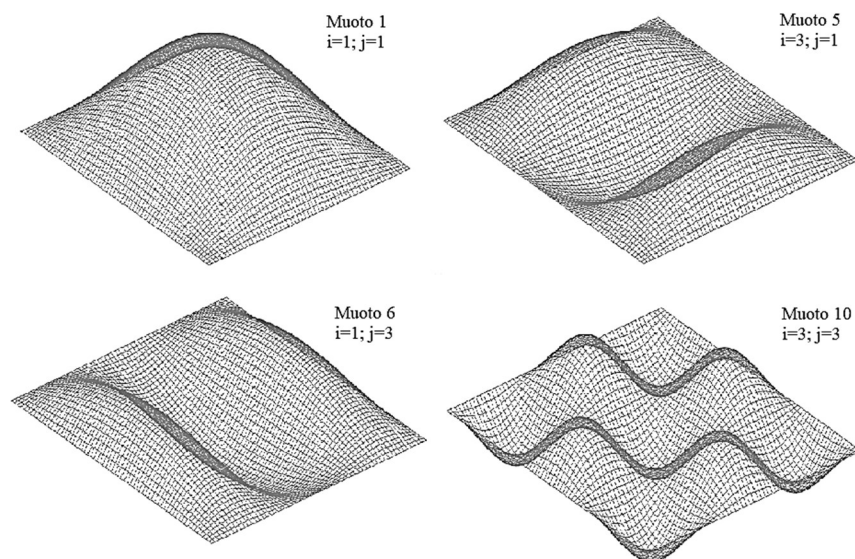
**Taulukko 5.** Neljältä reunalta vapaasti tuetun vakiokorkuisen laatan ominaistajuudet

Muoto	Puoliaallot		Ominaistajuus $f_{ij}$ [Hz]		Ero [%]	Moodimassa [%]
	$i$	$j$	Kaava (65)	Robot		
<b>1</b>	<u>1</u>	<u>1</u>	26,50	25,78	3,0	<u>65,73</u>
2	2	1	61,30	59,25	3,4	0,00
3	1	2	71,56	69,28	3,2	0,00
4	2	2	106,30	100,94	5,0	0,00
<b>5</b>	<u>3</u>	<u>1</u>	119,22	114,25	4,2	<u>7,12</u>
<b>6</b>	<u>1</u>	<u>3</u>	146,54	139,93	4,5	<u>7,17</u>
7	3	2	164,20	153,85	6,3	0,00
8	2	3	181,28	169,79	6,3	0,00
9	4	1	200,28	188,78	5,7	0,00
<b>10</b>	<u>3</u>	<u>3</u>	239,18	219,82	8,1	<u>0,72</u>

Laskennan tuloksista havaitaan, että molemmilla menetelmillä saatavat arvot ovat alimmilla ominaismuodoilla asetetun virhemarginaalin sisällä eron ollessa 3-5%, mutta korkeammilla värähtelymuodoilla ero alkaa kasvaa. Eron voidaan tässä tapauksessa nähdä mahdollisesti aiheutuvan virheestä käytetyssä laskentaohjelmassa, sillä kuten edellä mainittiin, on ominaistajuuden laskentakaava teoreettisesti analyttinen neljältä reunalta vapaasti tuetun isotrooppisen laattarakenteen tapauksessa. Tuloksista nähdään myös, että laskentakaavoilla lasketut taajuudet jäävät jokaisessa tapauksessa moodianalyysillä saatavia taajuuksia korkeammiksi. Elementtimenetelmällä tulosten tarkkuutta voitaisiin lisätä tihentämällä elementtiverkkoa, mutta tämä vain laskisi taajuuksia hieman, sillä elementtimenetelmä lähestyy ominaistajuuksien ratkaisuja ”yläkautta” [13, s.291].

Taulukossa esitetyistä ominaismuodoista hallitsevia ovat muodot 1, 5, 6 ja 10. Ominaismuodoissa, joissa värähtelyyn osallistuvan massan osuus jää nolllaksi, rakenteessa vaikuttavat puoliallot esiintyvät laatan keskipisteen suhteen antimetrisesti ja näin hävittävät toistensa vaikutuksen, jolloin jäljelle ei jää värähtelevää massaa. Värähtelyä hallitsevissa

ominaismuodoissa tätä antimetriaa ei esiinny. Tämä voidaan myös havaita kuvasta 17, jossa on havainnollistettu graafisesti tutkitun laatan alimmat hallitsevat ominaismuodot.



**Kuva 17.** Vakiokorkuisen laatan hallitsevat ominaismuodot, Robot.

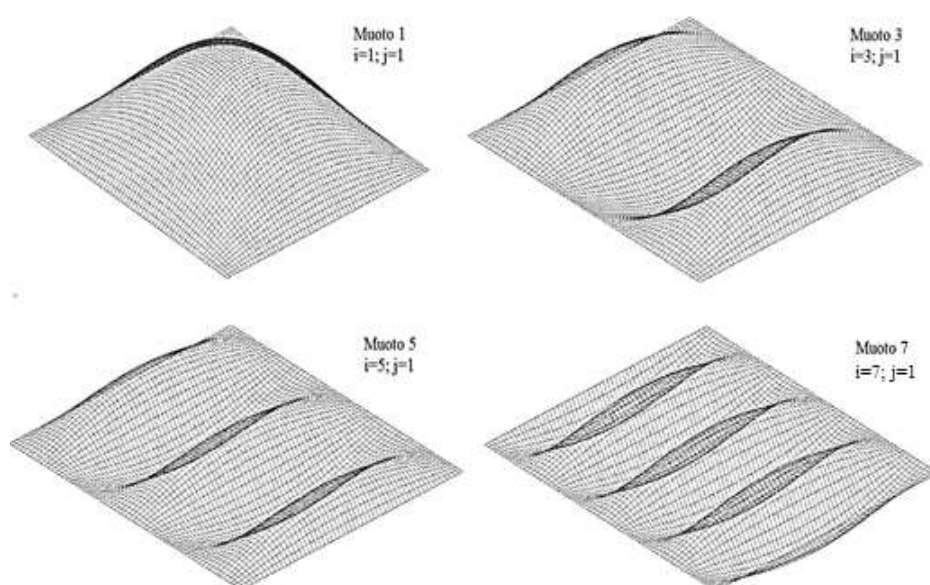
Tarkastellaan seuraavaksi alapuolelta palkeilla jäykistettyä laattaa vastaavalla tuennalla. Robot-ohjelmaan mallinnettuna ohjelma muuntaa jäykistetyin laatan ekvivalentiksi luonnollisesti ortotrooppiseksi tasapaksuksi laataksi ja suorittaa analyysin tälle laatalle. Laatatarkenteiden taulukossa 4 esitetyistä ominaisuuksista nähdään, että tutkitavan jäykistetyin laatan taivutusjäykkyys on jäykistetyssä suunnassa huomattavasti korkeampi kuin heikomman suunnan taivutusjäykkyys. Tällaisessa tilanteessa heikomman suunnan muodonmuutoksilla on Laavolan [10, s.19] mukaan vain vähän vaikutusta rakenteen ominaisuuksien suuruuteen, joten tutkitaan, miten tämä näkyy käytännössä. Ominaisaajuudet lasketaan nyt kaavalla (67) ja moodianalyysillä. Saadut tulokset on koottu taulukoon 6, jossa 5 prosentin eron ylittävät tapaukset on jälleen korostettu.

**Taulukko 6.** Neljältä reunalta vapaasti tuetun jäykistetyin laatan ominaisaajuudet.

Muoto	Puoliaallot		Ominaisaajuus $f_{ij}$ [Hz]		Ero [%]	Moodimassa [%]
	$i$	$j$	Kaava (67)	Robot		
<u>1</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	45,45	44,37	2,4	<u>65,60</u>
2	2	1	47,35	46,60	1,6	0,00
<u>3</u>	<u>3</u>	<u>1</u>	54,04	53,65	0,7	<u>7,21</u>
4	4	1	68,57	68,04	0,8	0,00
<u>5</u>	<u>5</u>	<u>1</u>	91,81	90,29	1,7	<u>2,56</u>
6	6	1	123,22	119,76	2,8	0,00
<u>7</u>	<u>7</u>	<u>1</u>	162,15	155,67	4,0	<u>1,28</u>
8	1	2	180,39	162,88	9,7	0,00
9	2	2	180,95	163,79	9,5	0,00
10	3	2	182,88	166,41	9,0	0,00

Myös jäykistetylle laatalle neljältä reunalta vapaasti tuettuna alimmat ominaistajuuudet osuvat molemmilla laskentamenetelmillä asetetun virhemarginaalin 0-5 % sisään, mutta korkeammilla ominaismuodoilla ero alkaa jälleen syntyä. Tuloksista on nähtävissä, että niille ominaismuodoille, joilla jäykemmässä suunnassa ominaismuoto on perusominaismuodon kaltainen, taajuudet tulevat lähelle toisiaan. Erityisesti neljä alinta ominaistajua osuvat lähelle toisiaan verrattuna laatan 1 tuloksiin. Tämä johtuu nimenomaan edellä mainitusta laatan heikomman suunnan muodonmuutosten pienestä vaikutuksesta, jolloin rakenteeseen syntyy helpommin heikomman suunnan suuntaisia värähtelyn puolialtoja.

Ominaismuotojen hallitsevuuteen pätevät samat periaatteet kuin laatalle 1. Niihin tapauksiin, joissa puolialtojen antimetriaa ei esiinny, osallistuu suurin osa rakenteen värähtelystä massasta. Hallitsevat ominaismuodot jäykistetylle laatalle on esitetty kuvassa 18.



**Kuva 18.** Jäykistetyin laatan hallitsevat ominaismuodot, Robot.

Kuvien 17 ja 18 mukaisia alimpia ominaismuotoja vertaillaessa nähdään, että lukuun ottamatta ensimmäistä ominaismuotoa rakenteiden alimmat ominaismuodot poikkeavat toisistaan. Tämä aiheutuu tutkitun jäykistetyin rakenteen vahvasta ortotrooppisuudesta. Jäykistetty rakenne värähtelee helpoiten taajuuksilla, joilla jäykemmässä suunnassa värähtelyn ominaismuoto on perusominaistajuuden kaltainen. Näin ollen heikommassa suunnassa esiintyy jo seitsemää puolialtoa taajuuden silti jäädessä alemmaksi kuin muodon, jossa vahvemmassa suunnassa esiintyy kaksi puolialtoa ja heikommassa yksi.

Merkittävin ero vakiopaksuisen ja jäykistetyin laatan ominaistajuuksien lukuarvoissa on jäykistetyin laatan perusominaistajuuden asettuminen huomattavasti korkeammaksi kuin laatan 1. Tulos luonnollisesti aiheutuu jäykistetyin laatan suuremmasta jäykkyydestä, sillä kuten yleisesti tiedetään, jäykkyyden kasvatus johtaa perusominaistajuuden arvon

kasvamiseen. Tämä siitäkin huolimatta, että vakiokorkuisen laatan massa on noin 25 % suurempi kuin jäykistetyin. Ero laattojen vahvemman suunnan jäykkyydessä on merkittävästi suurempi kuin ero rakenteiden massassa.

Yleisesti voidaan todeta, että laskentakaavalla ja tietokoneavusteisesti saatavat tulokset osuvat lähelle toisiaan neljältä reunalta vapaasti tuetuille laatoille sekä jäykistetyille että tasapaksulle laatalle. Korkeammilla ominaisuudilla alkaa arvon 150 Hz kohdalla kaaavan tulos molemmissa rakenteissa heittää moodianalyysin tuloksista, mikä kuitenkin on rakenteiden värähtelymitoituksessa merkityksetöntä, sillä näin suuritaajuisia herätettä harvoin esiintyy todellisuudessa. Koska näissä tutkituissa tapauksissa on lisäksi kyseessä vasta rakenteen seitsemäs ominaisuus, ei värähtelyyn osallistu kuin pieni osa massasta ja resonanssin tapahtuessa syntyvä vaste jää joka tapauksessa suhteellisen pieneksi, riippuen tietysti herätevoiman maksimiampplitudin suuruudesta.

### 5.2.2 Jäykästi tuetut laatat

Seuraavana tuentatapauksena tutkitaan neljältä reunalta jäykästi tuettuja laattarakenteita, joiden reunoilla ei esiinny siirtymiä eikä kiertymiä [17]. Rakenteen kiinnitysasteen kasvassa kasvavat myös sen ominaistaajuudet, joten selvitetään, mikä vaikutus ominaistaajuuksien arvojen suurenemisella on laskentakaavojen (65), (66/67) ja Robotin moodianalyysin välisiin tuloksiin. Neljältä reunalta jäykästi tuetun laatan ominaistaajuuksien parametrit ovat taulukon 3 kohdan 2 mukaisia. Alla taulukossa 7 on esitetty saadut tulokset vakiopaksuiselle laatalle.

**Taulukko 7.** Neljältä reunalta jäykästi tuetun vakiopaksuisen laatan ominaistaajuudet.

Muoto	Puoliaallot		Ominaistaajuus $f_{ij}$ [Hz]		Ero [%]	Moodimassa [%]
	$i$	$j$	Kaava (65)	Robot		
<u>1</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	48,86	47,47	2,8	<u>49,34</u>
2	2	1	91,73	87,73	4,4	0,00
3	1	2	107,20	101,98	4,9	0,00
4	2	2	146,82	137,71	6,2	0,00
<u>5</u>	<u>3</u>	<u>1</u>	160,07	150,00	6,3	<u>8,91</u>
<u>6</u>	<u>1</u>	<u>3</u>	196,91	182,49	7,3	<u>9,90</u>
7	3	2	212,40	195,57	7,9	0,00
8	2	3	234,92	214,85	8,5	0,00
9	4	1	252,35	230,78	8,5	0,00
<u>10</u>	<u>3</u>	<u>3</u>	297,88	268,15	10,0	<u>1,06</u>

Taulukosta havaitaan, että vain kolmelle ensimmäiselle ominaistaajuudelle asetettu viiden prosentin virhemarginaali alittuu, joten verrattuna kaikilta reunoilta vapaasti tuettuihin laattoihin tuloksissa on enemmän epävarmuutta. Ylemmissä taajuuksissa eroa alkaa syntyä kuudesta kymmeneen prosenttiin. Näissä kaavalla lasketut ominaistaajuudet ovat

korkeita, yli 140 Hz. Näin ollen vaikutus käytännön värähtelyongelmiin on tässäkin lähes olematon. Vapaasti tuettuihin laattoihin tuloksia verrattaessa havaitaan, että myös alimmalla ominaistajajuudella värähtelyyn osallistuu huomattavasti pienempi massa kuin vapaasti tuetuilla rakenteilla, ainoastaan noin puolet rakenteen massasta, joten ylemmät ominaistajajuudet voisivat olla merkittäviä. Ominaismuotojen hallitsevuuteen ei tällä tuentatavalla ole vaikutusta verrattuna kaikilta reunoilta vapaasti tuettuun laattaan, vaan hallitsevat muodot ovat edellistä tapausta vastaavat. Taulukossa 8 on esitetty jäykistetyille laatalle saadut tulokset.

**Taulukko 8.** Neljältä reunalta jäykästi tuetun jäykistetyyn laatan ominaistajajuudet.

Muoto	Puoliaallot		Ominaisaajuus $f_{ij}$ [Hz]		Ero [%]	Massa [%]
	$i$	$j$	Kaava (67)	Robot		
<u>1</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	102,63	90,36	12,0	<u>50,27</u>
2	2	1	104,81	92,37	11,9	0,00
<u>3</u>	<u>3</u>	<u>1</u>	110,78	98,15	11,4	<u>9,26</u>
4	4	1	122,95	110,02	10,5	0,00
<u>5</u>	<u>5</u>	<u>1</u>	143,13	129,42	9,6	<u>3,87</u>
6	6	1	171,99	156,61	8,9	0,00
<u>7</u>	<u>7</u>	<u>1</u>	209,39	191,08	8,7	<u>2,13</u>
8	8	1	254,88	219,31	14,0	0,00
9	1	2	281,95	220,23	21,9	0,00
10	2	2	283,28	222,85	21,3	0,00

Neljältä reunalta jäykästi tuetulle jäykistetyille laatalle kaikki lasketut ominaistajajuudet eroavat enemmän kuin rajaksi asetetun 5 prosentin verran eron ollessa 8,7-21,9 %. Edes perusominaistajajuus ei asetu virhemarginaalin sisään. Joko laskentakaavan, Robotin laskennan tai molempien tarkkuus voidaan siis asettaa kyseenalaiseksi. Laskentakaavalla saatavat ominaistajajuudet ovat kaikissa ratkaistuissa muodoissa korkeampia kuin 100 Hz ja alin ominaistajajuus on hyvin korkea verrattuna edellä käsiteltyihin tapauksiin, joissa tulokset osuivat määritellyn 5 prosentin rajan sisäpuolelle. Tässäkin perusominaistajajuudella värähtelyyn osallistuu vain noin puolet koko rakenteen massasta, mikä on merkittävästi pienempi osuus kuin edelliselle tuentatapaukselle. Ominaismuotojen hallitsevuuteen pätevät samat periaatteet kuin edellä.

### 5.2.3 Muut tuentatapaukset

Vastaava ominaistajuuksien analysointi suoritetaan myös muille taulukossa 3 esitetyille reunaehdoille. Tulokset on esitetty liitteen 1 taulukoissa 1-6. Niistä havaitaan, että neljältä reunalta jäykästi tuetun jäykistetyyn laatan tapaan alimman ominaistajajuuden ollessa korkea alkaa laskentamenetelmien välinen ero kasvaa. Tällaisia tapauksia ovat kahdelta vastakkaiselta reunalta jäykästi tuettu ja kahdelta tukematon jäykistetty laatta sekä kahdelta

vastakkaiselta reunalta jäykästi ja kahdelta vapaasti tuettu jäykistetty laatta (taulukon 3 tuentatapaukset 4 ja 5). Ominaistaajuudet ovat kummallakin menetelmällä hyvin lähellä edellä lasketun kaikilta reunoiltaan jäykästi kiinnitetyn laatan ominaistaajuuksia, joten poikkeama tuloksissa on hyvin samankaltainen kuin edellä. Tämän tutkimuksen perusteella ei voida sanoa, ovatko laskentakaavalla, tietokonelaskennalla vai kummallakaan tulokset lähempänä totuutta. Kuitenkin voidaan todeta, että molemmat menetelmät antavat karkean alustavan arvion laatan värähtelyherkkyydestä, sillä ominaistaajuudet ovat hyvin korkeita, eikä näillä rakenteilla värähtelyongelmia todennäköisesti pääse esiintymään. Niissä tutkituissa tapauksissa, joissa ominaistaajuudet jäävät matalammiksi, ovat tulokset lähellä toisiaan. Eroa alkaa syntyä vasta korkeilla taajuuksilla kuten edellä.

Toinen poikkeama edellä mainitun lisäksi havaitaan isotrooppiselle tasapaksulle laatalle, kun kaksi vastakkaista reunaa ovat tukemattomia (tuentatapaukset 3 ja 4). Tällöin laskentamenetelmien välillä on varianssia niissä ominaistaajuuksissa, joissa tukemattoman reunan suuntaisia sinimuotoisen värähtelyn puolialtoja esiintyy kaksi kappaletta. Erot eivät voi aiheutua samasta syystä kuin edellä, sillä ominaistaajuudet ovat verrattain matalia. Tuloksella ei sinällään ole suurta käytännön merkitystä, koska näissä värähtelymuodoissa puoliallot esiintyvät antimetrisesti, jolloin värähtelyyn osallistuvan massan osuus jää nolnaan.

### 5.3 Johtopäätökset

Ominaistaajuuksien laskentatulosten perusteella voidaan todeta, että likikaavoilla ja Robotilla saadaan toisiaan vastaavia tuloksia, kun rakenteiden perusominaistaajuus on suuruusluokassa 50 Hz. Erityisesti jäykistetyille laatoille laskentamenetelmien välinen ero kasvoi rakenteiden kiinnitysasteen kasvaessa, jolloin perusominaistaajuus ylitti tai lähestyi likimenetelmillä arvoa 100 Hz. Lisäksi havaittiin, että ylemmissä ominaismuodoissa alkoi syntyä raja-arvoksi asetetun 5 prosentin ylittäviä eroja suuruusluokassa 125-150 Hz. Leissa [40, s.43] mainitsee, että likikaavojen antamien tulosten tarkkuus heikkenee, kun puolialtojen lukumäärää kasvatetaan, joten tulos ei ollut yllättävä. Myös elementtimenetelmällä korkeammat taajuudet ovat epätarkempia. Havaituilla seikoilla ei käytännön suunnitteluun ole juurikaan vaikutusta, sillä näin jäykät rakenteet ovat pääsääntöisesti värähtelyn kannalta turvallisia eikä tämän suuruusluokan herätteitä tavallisesti esiinny. Lisäksi havaittiin yhteen suuntaan kantavilla laatoilla pieniä asetetun virhemarginaalin ylittäviä poikkeamia, kun tukemattoman reunan suuntaisia puolialtoja esiintyi kaksi kappaletta. Tälläkään havainnolla ei ole suurta käytännön merkitystä, sillä näissä ominaismuodoissa ei analyysin perusteella värähtelyyn osallistu yhtään rakenteen massasta. Yhteenvetona voidaan todeta siis, että molemmat menetelmät antoivat toisiaan vastaavia tuloksia niille tutkituista rakenteista, jotka olivat värähtelyherkkiä.

Tehdyn melko suppean ominaistaajuusanalyysin perusteella on mahdotonta sanoa, ovatko Robotin moodianalyysillä vai likikaavoilla saadut tulokset lähempänä



todellisuutta. Neljältä reunalta vapaasti tuetulle laattarakenteelle laskentakaava on matemaattisesti analyyttinen, joten teoriassa kaavalla saatavien tulosten voidaan olevan oikeita, mutta vastaavuus todellisuuteen olisi hyvä pystyä todentamaan esimerkiksi mittauksin. Jäykistetyin laatan laskenta toteutettiin kaavalla (67), jossa tehtiin Ohlssonin [34, s.73] esittämä yksinkertaistus, että useimmille ortotrooppisille välipohjarakenteille rakenteen heikomman suunnan taivutusjäykkyyden voidaan olettaa yhtä suuri kuin laatan tehollinen vääntöjäykkyys  $D_{xy}$ , joten tehollisen vääntöjäykkyyden vaikutukset ominaistajuuksiin jätettiin huomiotta.

## 6. RAKENTEIDEN VASTE HARMONISEN HERÄTTEEN VAIKUTTAESSA

Ominaisaajuuden laskennan lisäksi olennainen osa rakenteen värähtelytarkastelu on selvittää siihen syntyvä dynaaminen vaste. Tässä luvussa tarkastellaan teräsbetonisiin välipohjarakenteisiin syntyvää vastetta, kun välipohjalla vaikuttaa pyörivän koneen aiheuttama harmoninen heräte. Tarkoituksena on havainnollistaa, millainen vaikutus syntyvään vasteeseen on, kun rakenteiden ominaisuuksia muutetaan. Dynaaminen kuormitus sekä rakenteiden käyttökelpoisuuden arviointiin käytettävät raja-arvot määritetään luvun 4 mukaisesti, joten tässä luvussa tulee käsiteltäviä tarkemmin myös välipohjarakenteen värähtelymitoituksen vaiheita.

### 6.1 Laskentamenetelmä dynaamiselle vasteelle

Värähtelyn rakenteeseen aiheuttama vaste selvitetään tietokoneavusteisesti Robot-ohjelman taajuusvastefunktioanalyysillä (FRF, Frequency Response Function). Taajuusvastefunktio kertoo systeemin vasteen millä tahansa valitulla herätteen kulmataajuuden arvolla. Se on siis vasteen ja herätteen välinen suhde pakkovärähdystilassa, kun systeemin ominaisvärähtely on hävinnyt systeemistä. FRF-analyysin tarkoituksena on löytää taajuusvastefunktio valitulle elementin solmupisteelle, jolloin funktion avulla piirretyltä vasteen kuvaajalta voidaan lukea, millä taajuudella värähtelyn vaikutus systeemiin on suurimmillaan. [36, s.114] [37]

Tässä työssä selvitettävä dynaaminen vaste on laattarakenteen hetkellinen siirtymä, sillä kuten luvussa 4 kävi ilmi, arvioidaan erityisesti pyöriville koneille sallittavia värähtelyjä usein siirtymävasteelle asetettujen raja-arvojen kautta. Taajuusvastefunktioanalyysia varten on Robotissa aluksi määritettävä dynaamista kuormitustilannetta vastaava staattinen tilanne ja muutettava kuorman analyysityyppiä staattisesta analyysistä taajuusvastefunktioanalyysiksi. Edellisessä luvussa käsitelty moodianalyysi on toteuttava ennen FRF-analyysiä ominaisaajuuksien ja -muotojen löytämiseksi. Lisäksi Robotissa on määriteltävä tutkittava taajuusalue, millä vaste halutaan selvittää sekä tällä taajuusalueella tutkittavien tapausten lukumäärä. [37]

Koska vasteen analyysissä ollaan kiinnostuneita yleensä vain tietystä, melko suppeasta joukosta taajuuksia, ei ole järkevää määrittää liian suurta tutkittavaa taajuusaluetta, sillä laskenta-aika pitenee tutkittavien tapausten lukumäärän kasvaessa. Tässä työssä analyysi toteutetaan taajuusalueella 5-100 Hz. Pienempiä arvoja kuin 5 Hz ei ole tarpeen tarkastella, sillä tutkittavien rakenteiden perusominaisajuudet sekä käytettävän herätteen kulmataajuudet ovat merkittävästi suurempia. Yläraja asetetaan arvoon 100 Hz, jotta resonanssin aiheuttamat vasteen maksimiampplitudit saadaan näkyviin esitettäviin FRF-

analyysistä saataviin vasteen kuvaajiin myös rakenteiden ylemmillä hallitsevilla ominaismuodoilla, vaikka näin suuritaajuista herätettä esiintyykin hyvin harvoin. Taajuusaluetta tarkastellaan 0,1 Hz:n tarkkuudella. Robotin FRF-analyysin valintaikkunaan syötettävät parametrit on esitetty kuvassa 19.

Harmonic Analysis Parameters

Case: Dyn\_kuorma\_1kN

Frequency (Hz)

Initial: 5

Final: 100

Division: 950

☒ Consider eigenfrequencies from the specified range in calculations

Damping

☐ Without damping

☒ Constant: 0,02 ( - )

☐ Rayleigh [Define]

☐ Varying for each mode [Define]

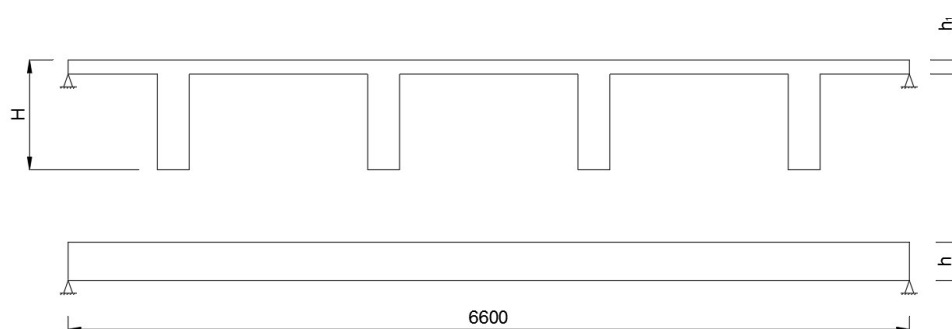
OK Cancel Help

**Kuva 19.** FRF-analyysin parametrit Robotissa

Koska tarkasteltava alue on 5-100 Hz 0,1 Hz:n tarkkuudella, on tutkittavia tapauksia 950 kappaletta. Mikäli rakenteen vaimennus halutaan huomioida, voidaan myös sille määrittellä arvo kuvan 19 mukaisesti. Tässä työssä suhteelliselle vaimennuskertoimelle käytetään arvoa 0,02.

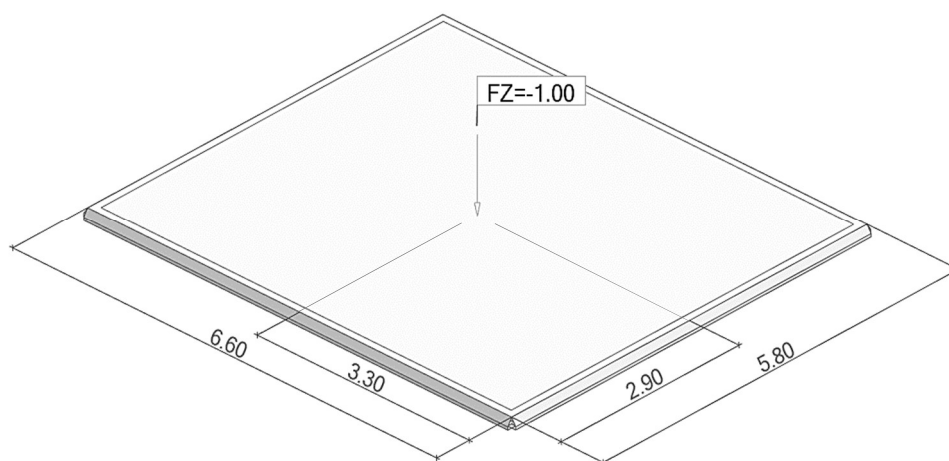
## 6.2 Tutkittava värähtelysteemi

Tarkoituksena on analysoida luvussa 3 mainittuja yleisimpiä paikallavalettuja teräsbetonisia välipohjarakenteita. Tutkittavina rakenteina ovat siis alapuolelta palkeilla jäykistetty laatta sekä vakiopaksuinen laatta, joiden poikkileikkaukset on esitetty kuvassa 20. Laattojen materiaaliominaisuudet ovat vastaavat kuin luvun 5 taulukossa 4. Jäykistetyin laatan palkkien jako on 1,65 m ja niiden leveys 250 mm. Nämä pidetään vakioina kaikissa tutkittavissa tapauksissa.



**Kuva 20.** Tutkittavien laattarakenteiden poikkileikkaukset

Tutkittavien rakenteiden tuentapa on neljä reunaa vapaasti tuettuna, sillä kuten luvun 5 tulokset rakenteiden ominaistajuuksissa osoittivat, nostaa kiinnitysasteen kasvattaminen rakenteen ominaistajuuksia. Koska rakenteen reagointi käytettävään dynaamiseen kuormitukseen halutaan näkyviin, ei ole järkevää tutkia tässä korkeampia kiinnitysasteita. Laatan rakennemalli on kaikissa tutkittavissa tapauksissa kuvan 21 mukainen sivumittojen ollessa 6,6 m ja 5,8 m, joten tutkittavana on laattarakenne ainoastaan yhdeltä pilari- ja jänneväliltä kuten luvussa viisi.



**Kuva 21.** Laatan rakennemalli (Robot)

Heräte sijoitetaan 1 kN alaspäin suuntautuvana harmonisena pistevoimana laatan keskipisteeseen, jotta saadaan aikaan suurin vaste, vaikka heräte harvoin sijaitseekaan tarkalleen laatan keskipisteessä. Koska harmonisen herätevoiman maksimiamplitudi riippuu herätteen kulmataajuudesta, tullaan rakenteen siirtymävaste selvittämään 1 kN:n voiman vaikuttaessa ja skaalaamaan oikealla dynaamisella kuormituksella vastaamaan todellista kulmataajuutta. Dynaamisena kuormituksena käytetään pyörivän massan epäkeskisyydestä aiheutuvaa herätettä, joka voidaan kuvata harmonisen kuormitusfunktion avulla. Etenkin jäykistettyjen laattarakenteiden tapauksessa alimmat ominaistajuuudet tulevat luvun 5 tulosten perusteella melko korkeiksi laatan vahvemman suunnan suuren taivutusjäykkyyden vuoksi. Tästä syystä herätteeksi valitaan suuritaajuinen dynaaminen kuorma,

jotta herätteen kulmataajuuden ja rakenteen ominaistaajuuden yhtymisen eli resonanssin vaikutus vasteeseen saadaan esille.

Valittu heräte on erään todellisen paperikoneen puristinosan huovan kierron tela, joka pienen halkaisijansa vuoksi saa suuren pyörimisnopeuden, ja sitä kautta suuren kulmataajuuden. Telan halkaisija on 403 mm ja massa 1240 kg. Tasapainoluokista tutkitaan standardissa ISO-21940 paperikoneille asetettava luokka G 6,3 sekä suurempaa valmistarkkuutta edellyttävä luokka G 2,5 [29]. Näiden tietojen perusteella lasketaan telalle koneen eri käyntinopeuksia vastaavat ominaistaajuudet sekä herätevoiman maksimi-amplitudit lukuun 4 perustuen. Koneen maksiminopeutena käytetään arvoa 2000 m/min (metriä minuutissa). Vaikka koneen suunnittelunopeus olisi korkea, ei se sulje pois matalampia ajonopeuksia [38, s.4], joten käyntinopeudet oletetaan välille 800-2000 m/min ja vasteita tutkitaan näiden arvojen kohdalta. Taulukossa 9 on esitetty luvun 4 mukaisesti lasketut kulmataajuudet ja dynaamisen voiman amplitudit kaikille tutkittaville käyntinopeuksille.

**Taulukko 9.** Koneen käyntinopeuksia vastaavat harmonisen herätteen kulmataajuudet ja dynaamisen voiman maksimi-amplitudit

Käyntinopeus [m/min]	Kulmataajuus [Hz]	Maksimi-amplitudi [N]	
		G 2.5	G 6.3
800	10,53	103	258
900	11,85	115	291
1000	13,16	128	323
1100	14,48	141	355
1200	15,80	154	388
1300	17,11	167	420
1400	18,43	179	452
1500	19,75	192	485
1600	21,06	205	517
1700	22,38	218	549
1800	23,70	231	582
1900	25,01	244	614
2000	26,33	256	646

Periaatteessa myös listattujen käyntinopeuksien alapuolelle sekä väliin jäävät nopeudet toteutuvat konetta kiihdytettäessä tai jarrutettaessa. Kyseiset tilanteet ovat kuitenkin hyvin hetkellisiä, joten myöhemmin laskettavia siirtymävasteen arvoja tutkitaan vain koneen pysyviä käyntinopeuksia vastaavien kulmataajuuksien kohdalta. Tutkittava kuormitustilanne on teoreettinen, sillä todellisuudessa paperikoneen telan laakeripesä tuskin sijaitsis keskellä välipohjaa. Yleensä telojen laakeripukit pyritään sijoittamaan suoraan konepalkkien päälle, jolloin telan aiheuttama dynaaminen kuormitus ei kuormita välipohjaa

[8]. Tilannetta käytetään kuitenkin tässä havainnollistamaan dynaamisen harmonisen kuormituksen vaikutusta.

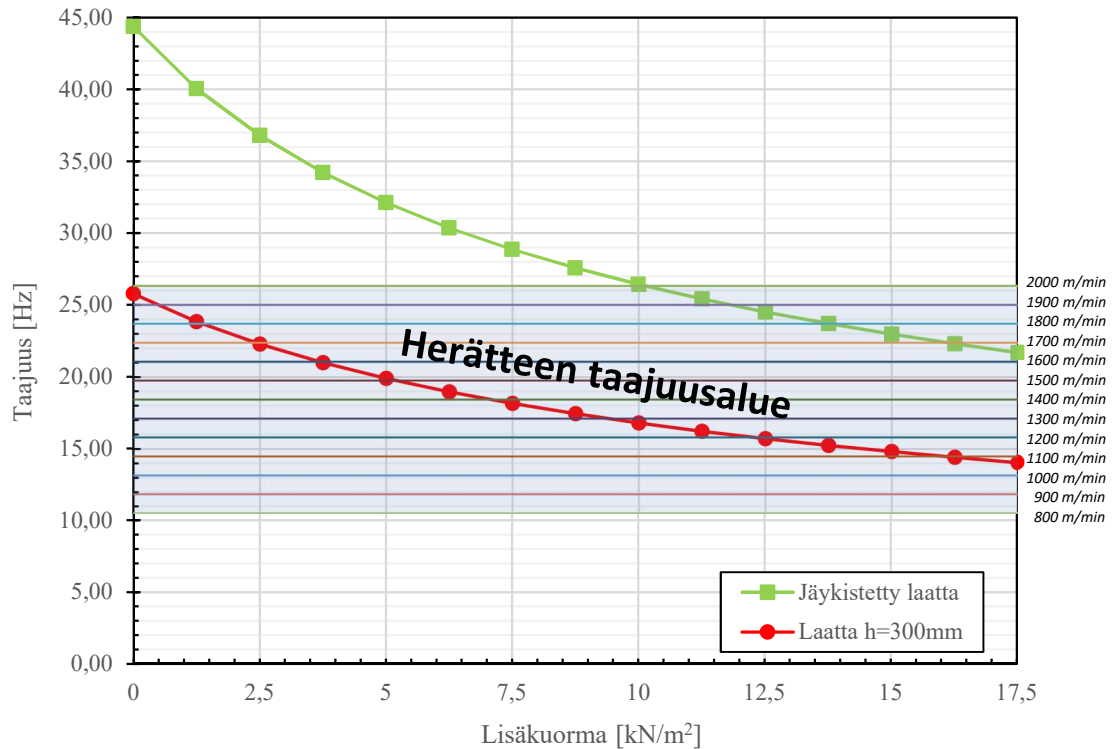
### 6.3 Vasteen laskenta

Tarkoituksena on tutkia laattarakenteiden keskipisteen siirtymävastetta Robotin taajuus-vastefunktioanalyysillä ja havainnollistaa, mikä vaikutus rakenteiden eri ominaisuuksien muuttamisella on niihin aiheutuvaan dynaamiseen vasteeseen edellä esitellyn dynaamisen herätteen vaikuttaessa. Herätteen luonteen lisäksi rakenteen värähtelyyn vaikuttavat rakenteen massa, jäykkyys, vaimennus sekä laatan ulkomitat, materiaaliominaisuudet ja tuentatapa [24, s.9]. Käytännössä suunnittelijan kuitenkin mahdollista etenkin olemassa olevien rakenteiden tapauksessa muuttaa ainoastaan rakenteen massaa ja jäykkyyttä [38, s.4]. Olemassa oleville teräsbetonisille välipohjarakenteille vahvistusmenetelmiksi soveltuvat usein joko rakenteen paksuuden tai pysyvän kuormituksen muuttaminen, joiden kautta rakenteen ominaistajuutta voidaan siirtää haluttuun suuntaan. Tämän vuoksi tässä luvussa tutkitaan, mikä vaikutus tarkasteltavien rakenteiden käyttökelpoisuuteen on, kun niiden pysyvää kuormaa ja rakenteen paksuutta muutetaan. Luvussa tulee lisäksi käsitellyä erot jäykistetyin ja jäykistämättömän laatan käyttökelpoisuudessa. Tutkittavana herätteenä on paperikoneen tela, joten sallittavia värähtelyjä arvioidaan käyttämällä koneille asetettavien yleisten värähtelyrajojen kuvaajaa, joka on esitetty luvun 4 kuvassa 16.

#### 6.3.1 Lisäkuorman vaikutus vasteeseen

Tutkitaan aluksi pysyvän kuormituksen lisäystä välipohjille. Lisättäessä pysyvää kuormitusta laattarakenteen jäykkyys pysyy vakiona massan kasvaessa. Olemassa olevaan rakenteeseen tällainen muutos on mahdollista toteuttaa esimerkiksi niin kutsutulla kelluvalla laatalalla, jossa lisätty massa erotetaan rakenteesta rakenteen ja lisätyn massan väliin jätettävän eristekerroksen avulla. Kuten yleisesti tiedetään, massan lisäys laskee rakenteen ominaistajuuksia. Mikäli rakenteen ominaistajuus esiintyy käytetyn herätteen taajuusalueella 10,5-26,3 Hz, massan lisäyksellä voi olla edullinen vaikutus rakenteen muuttuessa alaviritteiseksi, ja toisaalta yläviritteisille rakenteille lisäyksen vaikutus voi olla haitallinen, mikäli ominaistajuus siirtyy herätteen taajuusalueelle.

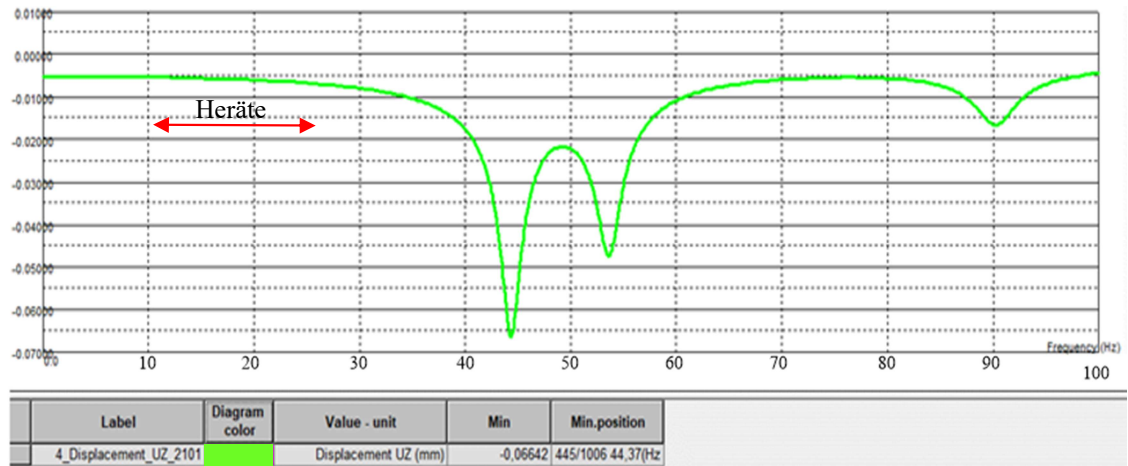
Ennen siirtymävasteen laskentaa on Robotissa määritettävä moodianalyysillä rakenteiden ominaistajuudet. Kuvassa 22 on esitetty molempien tutkittavien rakenteiden alimman ominaistajuuden kehittyminen, kun kuormitusta kasvatetaan. Kuvaajassa on lisäksi osoitettu kullakin koneen käyntinopeudella 800-2000 m/min aiheutuva telan kulmataajuuden arvo, sillä ominaistajuuksien laskeessa resonanssi tapahtuu eri käyntinopeuksilla. Alemmilla kulmataajuuksilla ovat herätteen maksimiampplitudit pienempiä, mikä havaitaan myös taulukosta 9.



**Kuva 22.** Laattojen perusominaistaajuuksien muutokset kuormanlisäyksillä.

Kuva 22 havainnollistaa hyvin, että pelkkä ominaistaajuuksien tarkastelu antaa lähtökohdan arvioida rakenteen värähtelyherkkyyttä. Jäykistetyin laattarakenteen nähdään olevan yläviritteinen, kun sille ei ole asetettu oman painon lisäksi muita pysyviä kuormituksia. Vakiopaksuinen 300 mm laatta taas on jo alkutilanteessa dynaamisen kuormituksen taajuusalueella, eikä se todennäköisesti ole soveltuva välipohjarakenteeksi tällaisen kuormituksen vaikuttaessa. Kuorman lisäyksien myötä nähdään, että jäykistetyin rakenteen ominaistaajuudet siirtyvät suurilla pysyvillä kuormilla resonanssialueelle, ja toisaalta vakiopaksuinen laatta ei suurillakaan kuorman lisäyksillä muutu alaviritteiseksi rakenteeksi, joten tälle resonanssi esiintyy eri käyntinopeuksilla koko tutkivalla alueella. Ominaistaajuudet pienenevät sitä vähemmän, mitä suuremmaksi kuorman lisäys käy, toisin sanoen ominaiskulmataajuus on kääntäen verrannollinen rakenteen massan neliöön.

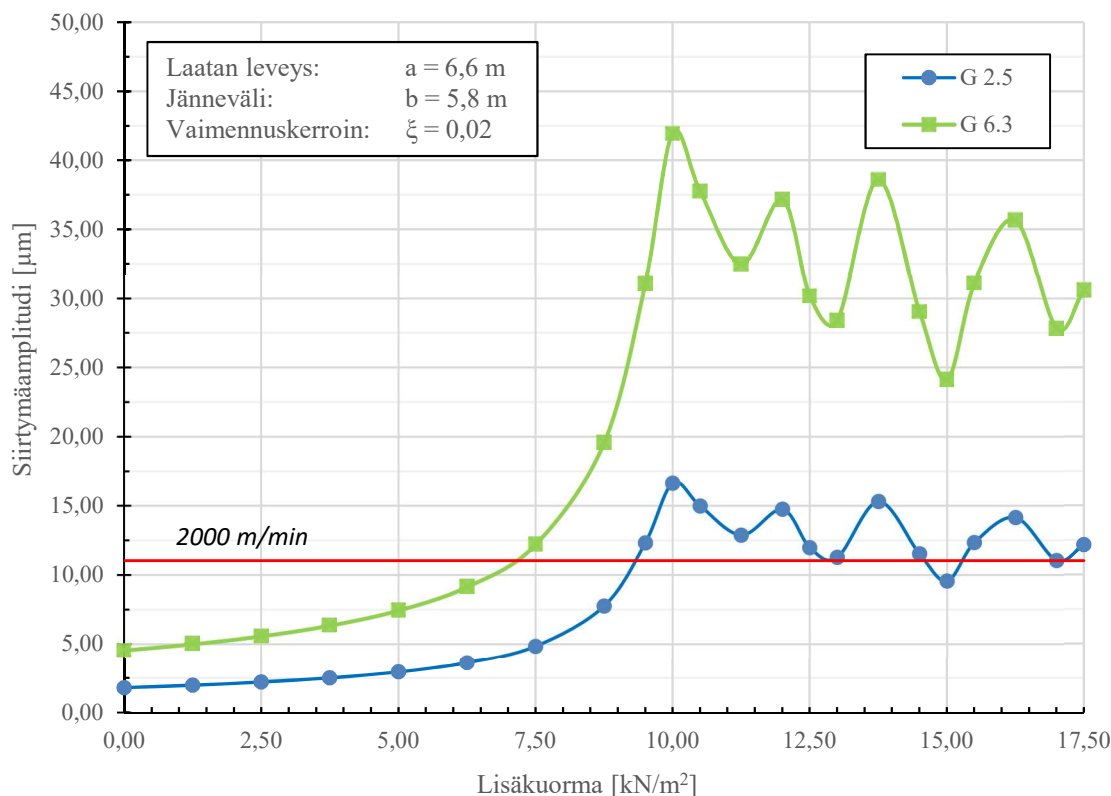
Tutkitaan nyt molempien laattarakenteiden keskipisteisiin syntyviä siirtymävasteita. FRF-analyysillä selvitetään siirtymävaste jokaiselle tutkittavalle pysyvän kuormituksen arvolle. Jäykistetyille laatalle kuormittamattoman tilanteen FRF-analyysin tulokset havainnollistava Robot -ohjelmasta saatava kuvaaja on esitetty kuvassa 23.



**Kuva 23.** Jäykistetyin laatan keskipisteen siirtymävasteen kuvaaja ilman kuormanlisäystä taajuusalueella 0-100 Hz (Robot).

Kuvaajasta nähdään selvästi, että resonanssin aiheuttamat piikit siirtymävasteeseen syntyvät tutkittavan herätteen taajuusalueen yläpuolella, jolloin kuormittamattomassa tapauksessa siirtymävaste herätteen ylimmällä taajuudella jää suhteellisen pieneksi. Kuvaajan muoto osoittaa, että siirryttäessä lähemmäksi resonanssitaajuutta vaste alkaa kasvaa hyvin nopeasti. Suurimman siirtymävasteen nähdään kuvaajan muodon perusteella kehittyvän tässä tapauksessa -koneen suurimmalla käyntitaajuudella. Kasvatettaessa kuormitusta ominaistajuuudet siirtyvät alemmas, jolloin luonnollisesti myös maksimisiirtymä syntyy alemmalla taajuudella. Vastaavasti lasketut jäykistetyin laatan siirtymävasteen maksimi-arvot eri kuorman lisäyksille on poimittu Robotin FRF-analyysin tuloksista kuvaan 24. Resonanssin kohdalla tutkittavien pisteiden lukumäärää on kasvatettu. Kuvaajaan on piirretty koneen suurinta käyntinopeutta 2000 m/min vastaava koneiden yleisten värähtelyjen siirtymävasteen raja, joka on noin 11  $\mu\text{m}$  (pyörimisnopeus 1580 rpm). Raja-arvon riippuessa käyntinopeudesta ovat alemmilla nopeuksilla rajat hieman korkeammat, joten tässä on esitetty ainoastaan kaikkein tiukin raja. Vasteen rajaksi on oletettu kuvan 16 mukainen alue *very good*, joka vastaa hetkellistä nopeutta 1,0 mm/s.





**Kuva 24.** Jäykistetyin laatan keskipisteen siirtymävasteen maksimiarvot eri kuormanlisäyksillä

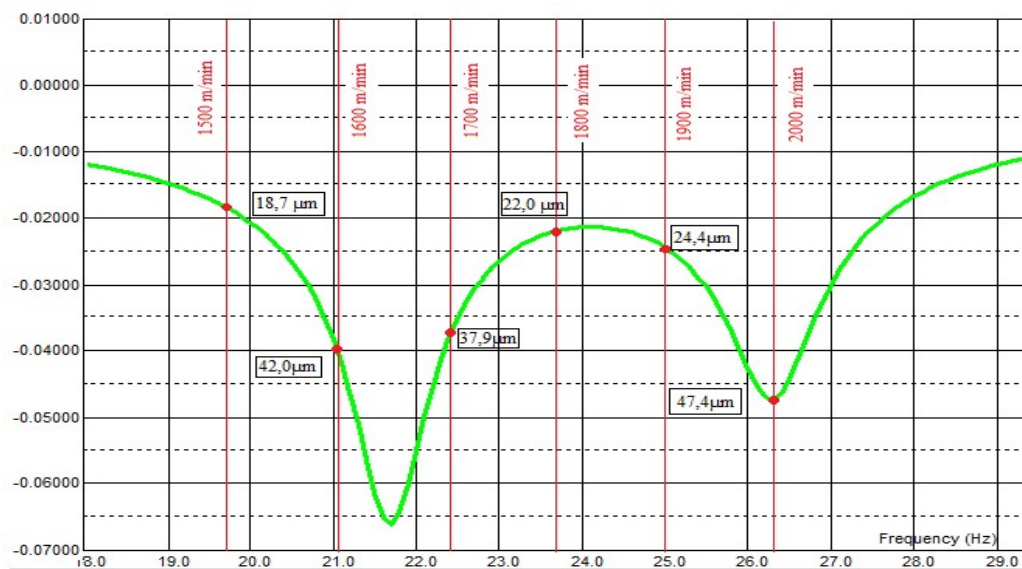
Kuvasta 24 havaitaan, että telan tasapainoluokan ollessa G 6.3, tutkittava laattarakenne ylittää asetetut raja-arvot 7,5 kN/m<sup>2</sup> lisäkuormalla. Mikäli tasapainoluokaksi vaaditaan tiukempi G 2.5, täyttää rakenne raja-arvot vielä 8,75 kN/m<sup>2</sup> lisäkuormalla, sillä vaste kasvaa samassa suhteessa kuin epäkeskisyys lisääntyy. Tätä suuremmilla pysyvillä kuormilla vaste kasvaa moninkertaiseksi resonanssin vuoksi.

Tarkastelupisteissä, joissa resonanssi esiintyy, siirtymävasteen arvo ei ole kaikissa sama. Tämä aiheutuu siitä, että heräte on määritelty vain tietyille, tasaisin välein esiintyville käyntinopeuksille, ja rakenteen ominaistaajuus osuu joissain tapauksissa kahden käyntitaajuuden väliin. Kuten FRF-analyysin tulokuvaajista (kuva 23) havaitaan, resonanssin aiheuttama piikki siirtymävasteeseen on niin merkittävä, että jo pieni ero ominaistaajuudessa ja herätteen kulmataajuudessa pienentää vastetta merkittävästi. Koneen kiihdytys- ja jarrutustilanteita ei huomioida analyysissä, joten kyseinen tulos pääsee aiheutumaan tutkituista tapauksista.

Kuvasta 24 voidaan nähdä esimerkiksi 15 kN/m<sup>2</sup> kuormanlisäyksellä tasapainoluokassa G 2.5 tapahtuva raja-arvon alittuminen, vaikka rakenne pääseeikin resonoimaan herätteen kanssa. Tulos osoittaa, että resonanssinkin tapahtuessa rakenteen vaste ei välttämättä kasva raja-arvot ylittäväksi, mikäli dynaamisen kuorman maksimiampplitudi ei ole kovin suuri. Huomioitava on myös, että 15 kN/m<sup>2</sup> kuormanlisäyksellä resonanssi saavutetaan alemmalla käyntinopeudella, jolloin myös todellinen siirtymävasteen raja-arvo olisi

korkeampi. Tämän perusteella voidaan todeta, että asetettaessa raja-arvo pelkästään ominaistajuuden ja herätteen taajuuden väliselle suhteelle, saattaa se johtaa liialliseen yliimitukseen. Tosin tässäkin on huomioitava, että kysymyksessä on vain yksittäinen raja-arvon alittuminen.

Siirtymävasteen tuloksia analysoitaessa havaittiin merkittävä poikkeama 17 ja 17,5 kN/m<sup>2</sup> kuormanlisäyksillä. Näissä suurin siirtymävasteen arvo saavutettiin käyntinopeudella 2000 m/min, vaikka kyseisten tapausten alimmat ominaistajuudet ovat lähempänä herätteen alempia käyntinopeuksia. Muista eriävä tulos aiheutuu aikaisemminkin mainitusta jäykistetyin rakenteen alimpien ominaistajuuksien lähekkäisyydestä. Tätä on havainnollistettu otoksella laatan siirtymävasteen kuvaajasta kuvassa 25, johon on merkitty koneen eri käyntinopeudet ja näillä aiheutuva suhteellisen siirtymävasteen arvo. Suhteellisella siirtymävasteella tarkoitetaan tässä, että siirtymävastetta ei ole skaalattu suhteessa todelliseen herätteen amplitudiin, vaan kuvassa 25 esiintyvät siirtymät syntyvät 1 kN he-  
rätevoimalla.



**Kuva 25.** *Otos suhteellisen vasteen kuvaajasta lisäkuormalla 17,5 kN/m<sup>2</sup>, Robot.*

Kuvasta nähdään, että suurin siirtymävasteen arvo kehittyi rakenteen toisen hallitsevan ominaistajuuden (3. ominaismuoto) kohdalla, koska käyntinopeutta 2000 m/min vastaava kulmataajuus yhtyy lähes täydellisesti tämän ominaismuodon taajuuteen, ja perusominaistajuutta lähellä olevat kulmataajuudet jäävät kauemmaksi ensimmäisen ominaismuodon täydellisestä resonanssista. Tämä havainnollistaa hyvin, että vasteen maksimiarvoa ei välttämättä saavuteta rakenteen perusominaistajuudella, vaan ylemmällä hallitsevalla ominaistajuudella, jos herätteen taajuusspektri ei ole jatkuva. Tästä syystä ei voida suoraan olettaa, että värähtely ei aiheuta ongelmia, jos perusominaistajuudella raja-arvot täyttyvät, vaan myös ylemmät hallitsevat ominaistajuudet on tutkittava. Asia korostuu erityisesti toiseen suuntaan jäykistetyillä rakenteilla, joissa alimmat ominaistajuudet saattavat tulla lähelle toisiaan. Alaviritteisten välipohjarakenteiden suunnittelu voi tämän

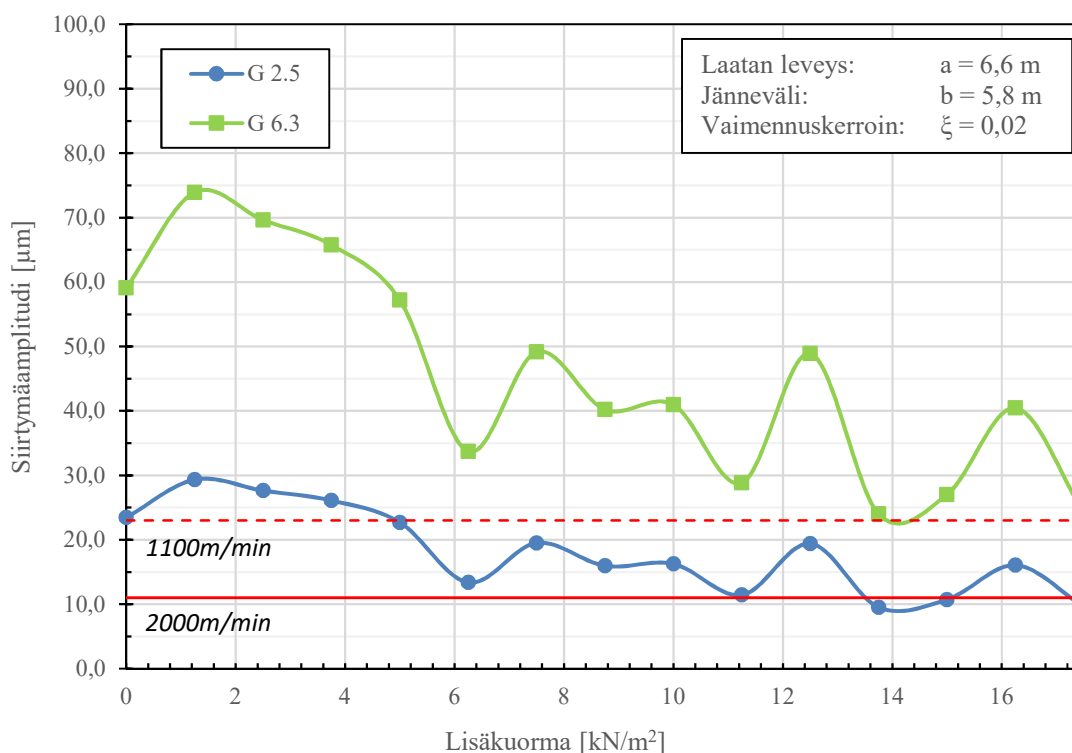
vuoksi jäykistetyille rakenteille osoittautua ongelmalliseksi. Niille vältettävä taajuusalue on huomattavasti suurempi, kuten kuvasta 25 voidaan havaita. Tässä esimerkkitapauksessa rakenteen ominaistajuuden tulisi vähintäänkin välttää herätteen taajuusalue 19-28 Hz, mikä on huomattava ero verrattaessa seuraavaksi selvitettäviin vakiokorkuisten laattojen mitoittaviin taajuusalueisiin.

Tutkitaan seuraavaksi 300 mm paksun suorakaidelaatan keskipisteen siirtymävasteen kehittymistä, kun pysyvää kuormaa kasvatetaan. Kuten edellä havaittiin, ominaistajuus on kaikissa tutkituissa tapauksissa herätteen taajuusalueella. Kuvassa 26 on esitetty Robotista saatava laatan kuormittamattoman tapauksen keskipisteen siirtymävasteen kuvaaja, josta on nähtävissä rakenteeseen aiheutuva yksittäinen resonanssin aiheuttama piikki siirtymävasteeseen. Tämä on merkittävä ero edellä käsiteltyyn jäykistettyyn laattaan, jolle haitallinen ominaistajuusalue on paljon suurempi.



**Kuva 26.** Vakiokorkuisen laatan keskipisteen siirtymävasteen taajuusalueella 5-100 Hz, Robot.

Jokaiselle kuormitustapaukselle vastaavasti lasketut keskipisteen siirtymävasteen arvot on esitetty kuvassa 27. Kuvaajaan on myös piirretty käyntinopeuksia 1100 m/min ja 2000 m/min vastaavat raja-arvokäyrät, sillä resonanssi tapahtuu koneen eri käyntinopeuksilla riippuen lisäkuorman määrästä kuvan 22 mukaisesti. Vasteen raja-arvojen määrittämisessä on tässäkin käytetty kuvan 16 mukaista käyrää *very good*.



**Kuva 27.** Vakiokorkuisen laatan keskipisteen siirtymävaste eri kuormanlisäyksillä.

Kuvaajasta nähdään, että tasapainoluokassa G 6.3 laattarakenne ei täytä asetettuja raja-arvoja missään tutkituista tapauksista, vaan siirtymävaste kasvaa suureksi. Tiukemmassa tasapainoluokassa G 2.5 raja-arvot alkavat täyttyä suurilla kuormanlisäyksillä, vaikka kuvan 22 mukaan rakenne onkin kaikissa tutkittavissa tapauksissa resonanssin alueella. Tämä johtuu dynaamisen kuormituksen maksimiamplitudin mataluudesta verrattuna suurempaan tasapainoluokkaan G 6.3. Dynaamisen kuorman amplitudi lisäksi pienenee herätteen mitoittavan kulmataajuuden laskiessa. Rakenne ei siis välttämättä ole käyttökelpoinen, vaikka ominaistajuus on herätteen taajuusalueella. Koska kuitenkin tiedetään, että epätasapaino ja sitä kautta dynaaminen voima yleensä ajan kuluessa lisääntyvät, ei rakenteen suunnitteleminen herätteen taajuusalueelle ole järkevää, mikäli se vain on mahdollista välttää. Tulos kuitenkin osoittaa, että raja-arvot voivat tällöinkin toteutua.

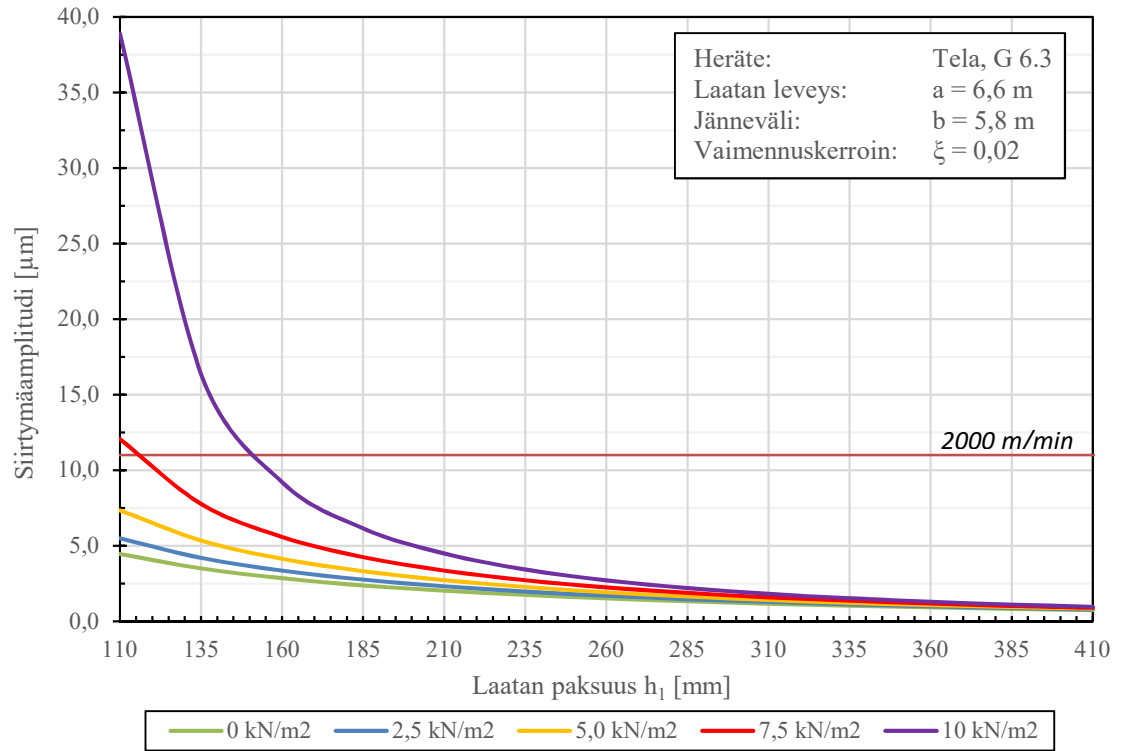
Yleisesti voidaan todeta, että välipohjien laattarakenteille massan lisäyksellä ei välttämättä saavuteta hyödyllisiä vaikutuksia siirtymävasteissa ainakaan silloin, kun heräte esiintyy laajalle taajuusvälillä ja rakenteen ominaistajuus sijaitsee tuon taajuusalueen yläpäässä. Näinkään merkittävät lisäkuormat eivät ole riittäviä muuttamaan tutkittuja rakenteita alaviritteisiksi. Lisäksi jäykistetyllä rakenteella alavirittäminen vaatisi hallitsevien ominaistajuuksien lähekkäisyydestä aiheutuvan suuren mitoittavan taajuusalueen siirtämistä kokonaan herätteen taajuusalueen alle, minkä aikaansaaminen voi osoittautua vaikeaksi. Pelkästään tämän perustella voidaan tehdä johtopäätös, että jäykistetyille rakenteille ylävirittäminen näyttää ainoalta vaihtoehdolta estää resonanssin syntyminen. Vakiokorkuiselle laatalle alavirittäminen voi matalataajuisemman herätteen esiintyessä

olla vaihtoehto johtuen rakenteelle haitallisen taajuusalueen kapeudesta, vaikkei tämä tutkituissa tilanteissa tullutkaan ilmi.

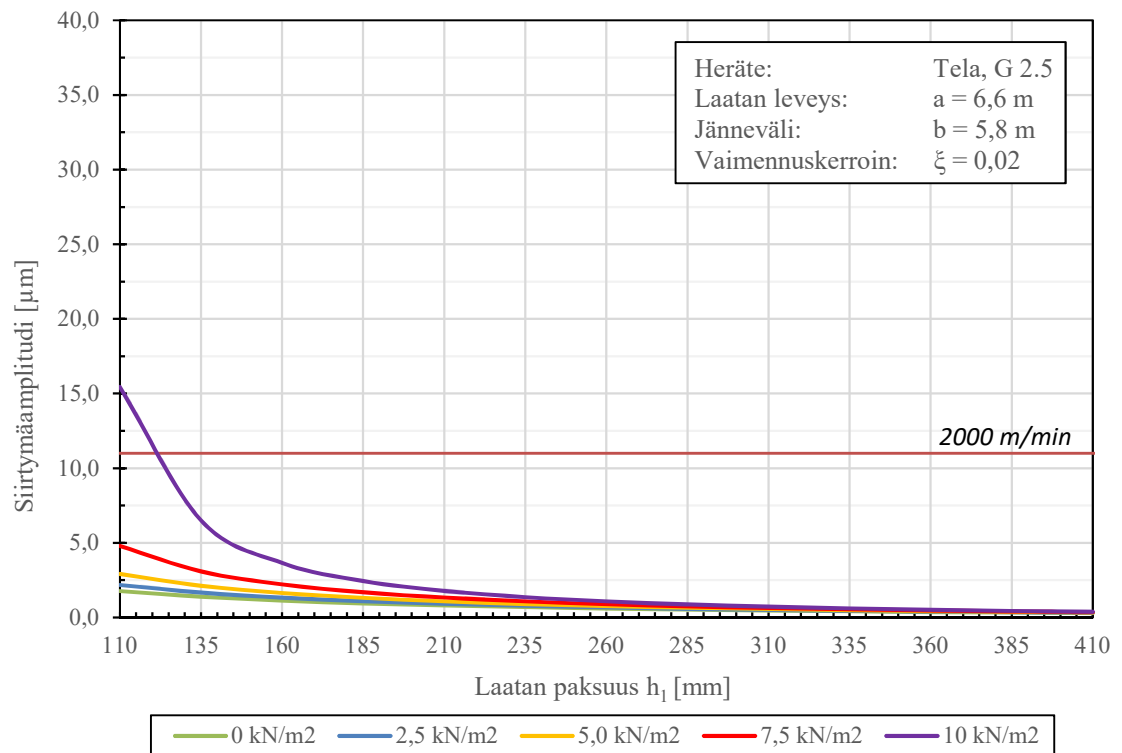
### 6.3.2 Laatan paksuuden vaikutus vasteeseen

Edellisessä kohdassa tutkittiin tarkasteltavien rakenteiden siirtymävastetta pysyvän kuorman eri arvoilla. Tutkitaan seuraavaksi päinvastaista tilannetta, jossa massa on suoraan liitoksissa alkuperäiseen rakenteeseen, toisin sanoen kasvatetaan rakenteen paksuutta, jolloin muuttuvat sekä rakenteen massa että jäykkyys. Tarkastelut suoritetaan jälleen jäykistetyille ja vakiopaksuiselle laatalle neljältä reunalta vapaasti tuettuna. Jäykistetyille rakenteelle tutkitaan kahta eri tapausta, sillä jäykisteiden yläpuolisen laatan paksuutta voidaan luonnollisesti muuttaa joko ylöspäin tai alaspäin. Ylöspäin paksuutta kasvatettaessa jäykistepalkkien korkeus pysyy vakiona laatan kokonaiskorkeuden kasvaessa, kun toisessa tilanteessa kokonaispaksuus pysyy vakiona palkkien korkeuden pienetessä. Molemmat tilanteet voivat tulla käytännön vahvistusmenetelmänä kysymykseen, sillä aina ei ole mahdollista kasvattaa rakenteen kokonaiskorkeutta alkuperäisestä. Laatan muut parametrit eli ulkomitat, palkkien jako ja niiden leveys pidetään vakioina. Vaste selvitetään viidelle eri kuormitustapaukselle pysyvän kuorman arvoilla 0-10 kN/m<sup>2</sup>.

Tutkitaan ensimmäiseksi jäykistettyä laattaa. Aloitetaan tapauksesta, jossa laatan korkeutta kasvatetaan ylöspäin järjestelmällisesti alkuarvosta 25 millimetrin välein, jolloin rakenteen kokonaiskorkeus kasvaa. Laatan keskipisteen siirtymävasteen maksimiarvo selvitetään erikseen kaikille tutkittaville tapauksille FRF-analyysillä. Laatan perustapauksen alimman ominaistaajuuden nähdään kuvassa 22 olevan kaikilla kuormitustapauksilla 0-10 kN/m<sup>2</sup> herätteen taajuuden yläpuolella. Kuten jäykistetyin laatan siirtymävasteen kuvaajasta kuormituslisäyksillä havaittiin edellä, ei rakenne täyttänyt asetettuja raja-arvoja yli 7,5 kN/m<sup>2</sup> kuormalla, kun herätevoiman amplitudi laskettiin tasapainotusluokan G 6.3 kautta. Korkeuden kasvattaminen jäykistää rakennetta ja lisää sen massaa, joten tutkitaan, täyttyvätkö raja-arvot suuremmilla korkeuksilla, ja kuinka suuri korkeuden kasvattaminen tähän tarvitaan. Lasketut siirtymävasteet tasapainotusluokille G 6.3 ja G 2.5 eri kuormitustapauksille on esitetty kuvissa 28 ja 29. Raja-arvona on käytetty käyntinopeuden 2000 m/min mukaista rajaa kuvan 16 mukaiselle käyrälle *very good*.



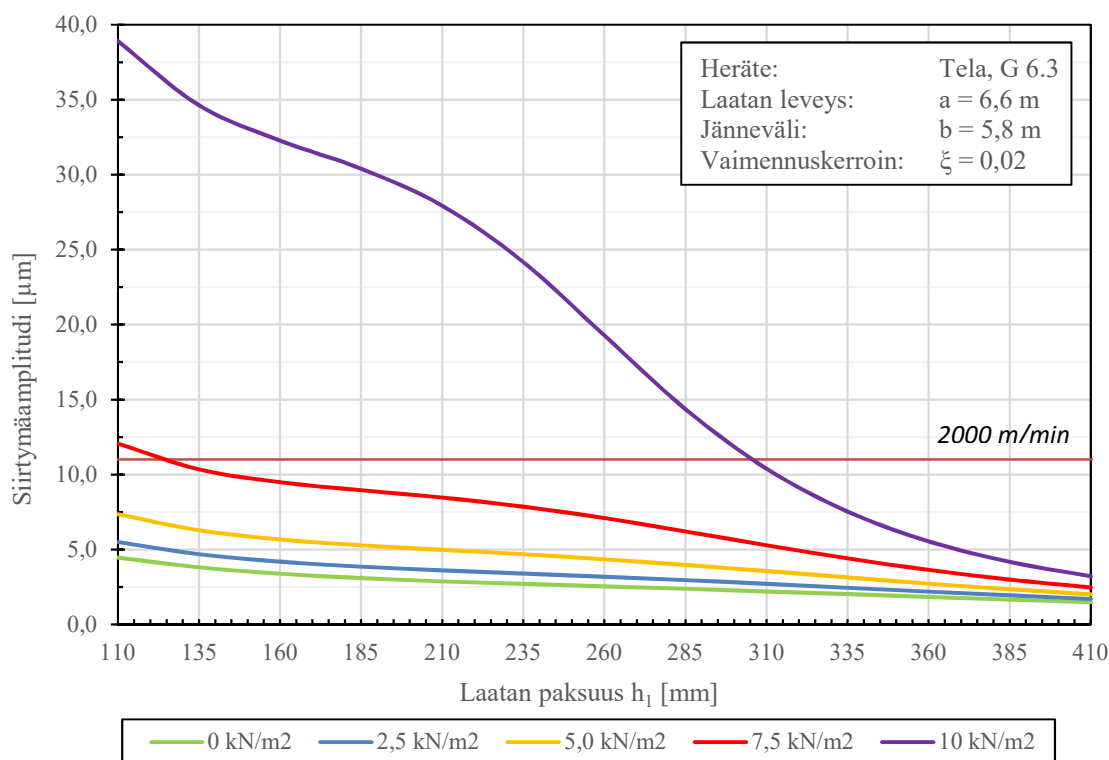
**Kuva 28.** Jäykistetyin laatan siirtymävaste laatan paksuuden funktiona pysyvän kuorman eri arvoilla tasapainotusluokassa G 6.3



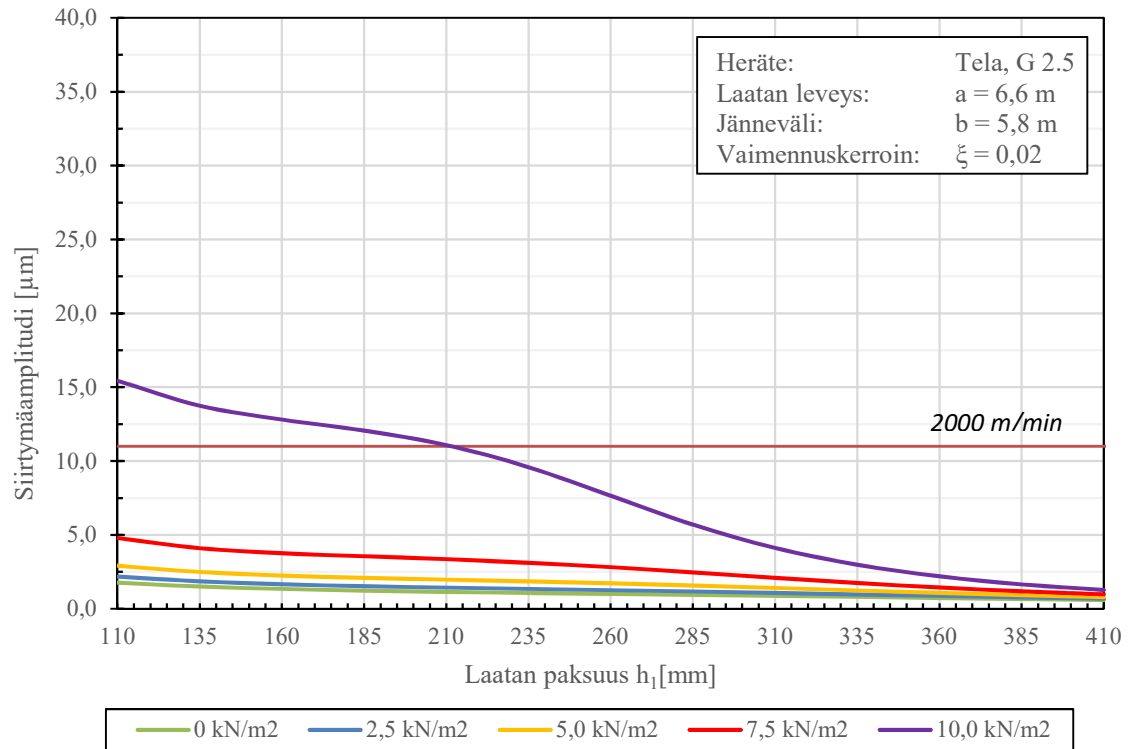
**Kuva 29.** Jäykistetyin laatan siirtymävaste laatan paksuuden funktiona pysyvän kuorman eri arvoilla tasapainotusluokassa G 2.5

Kuvaajista nähdään, että niille jäykistetyin laatan kuormitustapauksille, joilla raja-arvot edellisessä aliluvussa ylittyivät, toimii rakenteen kokonaiskorkeuden ja yläpuolisen korkeuden kasvattaminen soveltuvana vahvistusmenetelmänä. Korkeuden kasvattaminen ainoastaan 40 millimetrillä on suuremmalla dynaamisella kuormituksella riittävä siirtämään rakenteen ominaistajuuksia niin kauas herätteestä, ettei raja-arvot ylittävää värähtelyä tapahdu. Kuvan 29 tapauksessa tähän vaaditaan ainoastaan noin 10 mm:n korotus. Korkeuden kasvattamisella ei luonnollisestikaan ole negatiivisia vaikutuksia syntyvään vasteeseen jäykkyyden lisääntyessä ja ominaistajuuksien siirtyessä kauemmas herätteestä. Tällaisten jäykistettyjen laattojen voidaan näin ollen olettaa soveltuvan hyvin teollisuusrakennusten välipohjiksi, kun esiintyvä heräte, laatan tuenta ja ulkomitat sekä vaimennusominaisuudet ovat työssä käytetyn kaltaisia. Jos ongelmia esiintyy, on yläpuolisen laatan kasvattaminen tehokas menetelmä eliminoida ne.

Käsitellään seuraavaksi toista jäykistetyin laatan muutostilannetta, jossa jäykistepalkkien yläpuolisen laatan korkeutta kasvatetaan alaspäin. Laatan kokonaiskorkeus pysyy näin vakiona, mutta jäykistepalkkien korkeus pienenee laatan paksuuden kasvaessa. Tällöin ero heikomman ja vahvemman suunnan taivutusjäykkyyksissä pienenee. Kuten luvun 5 taulukosta 4 voitiin havaita, ovat laatan perustapaukselle erot taivutusjäykkyyksissä huomattavia. Yläpuolisen laatan korkeutta kasvatetaan jälleen 25 mm:n välein ja lasketaan FRF-analyysillä keskipisteiden siirtymävasteet. Ne on esitetty kuvissa 30 ja 31.



**Kuva 30.** Jäykistetyin laatan keskipistein siirtymävaste paksuuden funktiona pysyvän kuorman eri arvoilla tasapainotusluokassa G 6.3



**Kuva 31.** Jäykistetyin laatan keskipisteen siirtymävaste paksuuden funktiona pysyvän kuorman eri arvoilla tasapainotusluokassa G 2.5

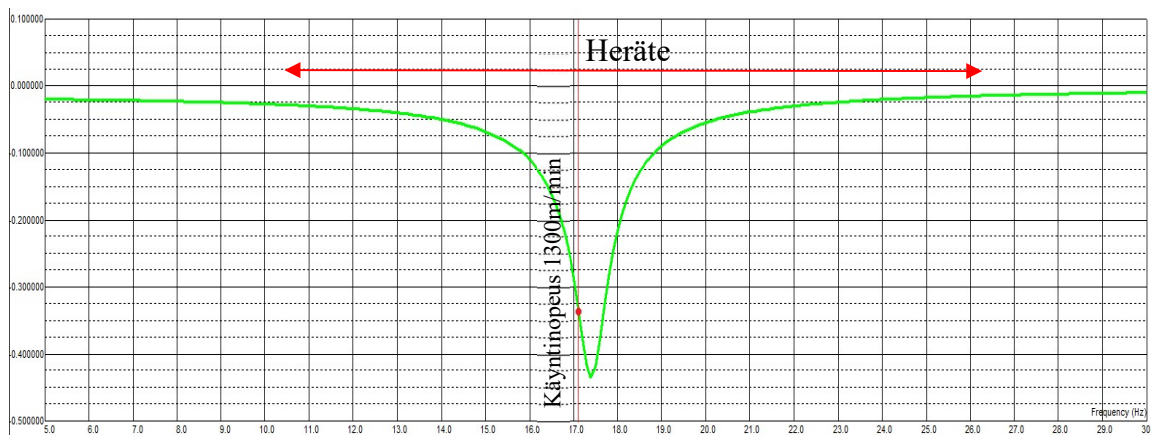
Havaitaan, että siirtymävaste ei pienene merkittävästi, vaikka yläpuolisen laatan paksuutta kasvatetaan. Kuvassa 30 raja-arvot täyttyvät lisäkuormalla  $10 \text{ kN/m}^2$  vasta yläpuolisen laatan korkeudella 300 mm. Rakenteen ominaistajuus muuttuu hyvin vähän yläpuolisen laatan korkeutta kasvatettaessa. Tästä syystä vastekin pysyy samalla tasolla pitkään, vaikka etenkin rakenteen heikomman suunnan taivutusjäykkyys lisääntyy huomattavasti. Jäykkyyden lisääntyminen on suhteellisen pientä verrattuna rakenteen massan kasvamiseen, jolla on ominaistajuuksia alentava vaikutus. Näin ollen ominaistajuudet aluksi laskevat, jolloin siirrytään lähemmäs resonanssia. Heikomman suunnan taivutusjäykkyyden kasvaminen kuitenkin estää vasteen arvojen kasvamisen.

Vertailemalla jäykistetyin laatan vahvistamistapoja voidaan selvästi havaita, että kasvatettaessa laatan paksuutta ylöspäin raja-arvot saadaan täytettyä pienemmillä korkeuden lisäyksillä. Näin ollen on mahdollista todeta, että mikäli värähtely aiheuttaa palkeilla jäykistetyssä välipohjalaatassa ongelmia, tehokkaampi tapa säätää rakenteen ominaistajuutta ja rajoittaa vastetta on kasvattaa sen korkeutta ylöspäin, jos tilanahtaus ei tuota ongelmia tälle toimenpiteelle. Näin rakenteen taivutusjäykkyys pysyy suurena, vaikka massa kasvaakin. Ominaisajuuksia kasvavat ja rakenne tulee yläviritteiseksi. Mikäli kyseessä on perusominaistajuuden suhteen alaviriteinen laatta, korkeuden kasvattaminen alaspäin voi sen sijaan olla suotuista, sillä heikomman suunnan taivutusjäykkyyden lisääntyessä korkeammat hallitsevat ominaistajuudet kasvavat huomattavasti ja mahdollisesti siirtyvät pois herätteen taajuusalueelta. Tilanne alkaa tällöin muistuttaa enemmän vakiokorkuista laattaa. Yleisesti voidaan kuitenkin kaikista jäykistettyjen laattojen



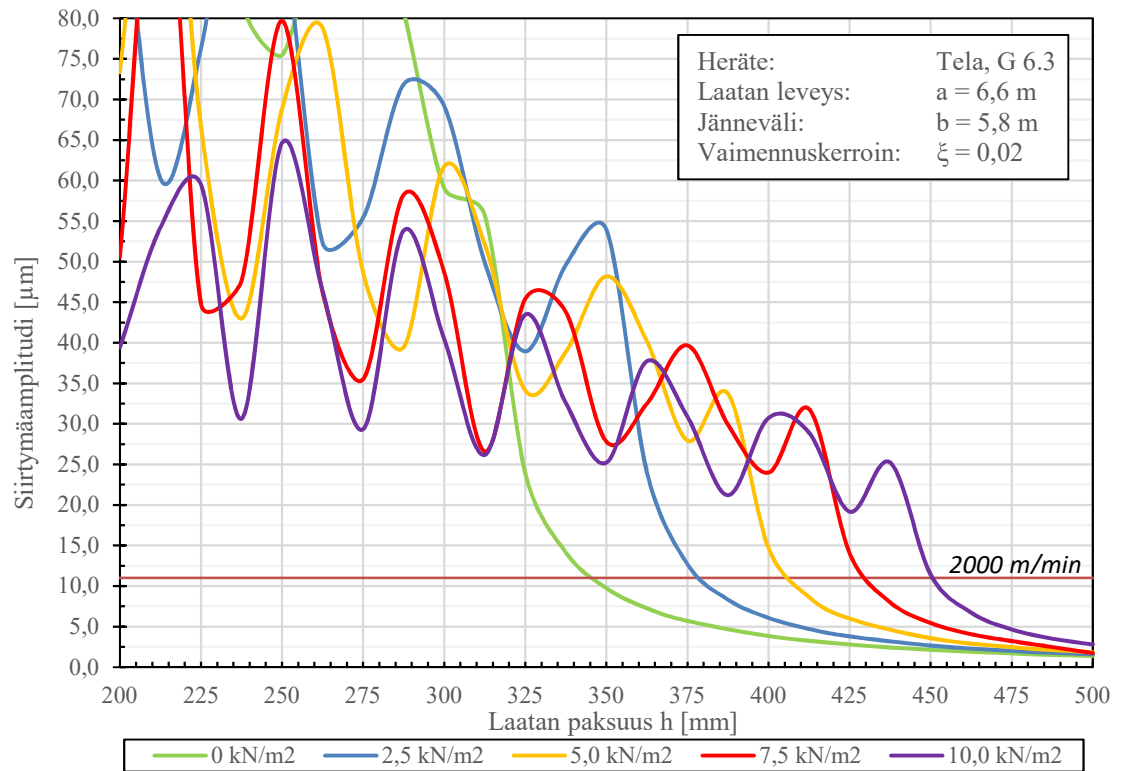
kuvaajista havaita niiden käyttökelpoisuus teollisuudessa, sillä ainoastaan hyvin suurilla kuormanlisäyksillä rakenteet ylittivät raja-arvot.

Selvitetään vielä korkeuden kasvattamisen vaikutuksia vakiokorkuiselle välipohjalaa-  
talle, jonka aikaisemmin havaittiin olevan lähes kaikilla tutkituilla kuormitustapauksilla  
kelvoton työssä käytetyn herätteen esiintyessä. Kuormituksen lisäämisellä, eli esimer-  
kiksi kelluvan laatan liittämällä alkuperäiseen rakenteeseen, ei havaittu kovin suotuisia  
vaikutuksia, kun tutkittiin 300 mm vakiokorkuista laattaa. Laatan paksuutta kasvatetaan  
nyt 12,5 millimetrin välein alkuarvosta 200 mm. Perustapauksen FRF-analyysillä saatu  
siirtymävasteen kuvaaja on esitetty kuvassa 32, jossa näkyy selvästi resonanssin aiheut-  
taman piikin sijaitseman keskellä herätteen taajuusalueetta.

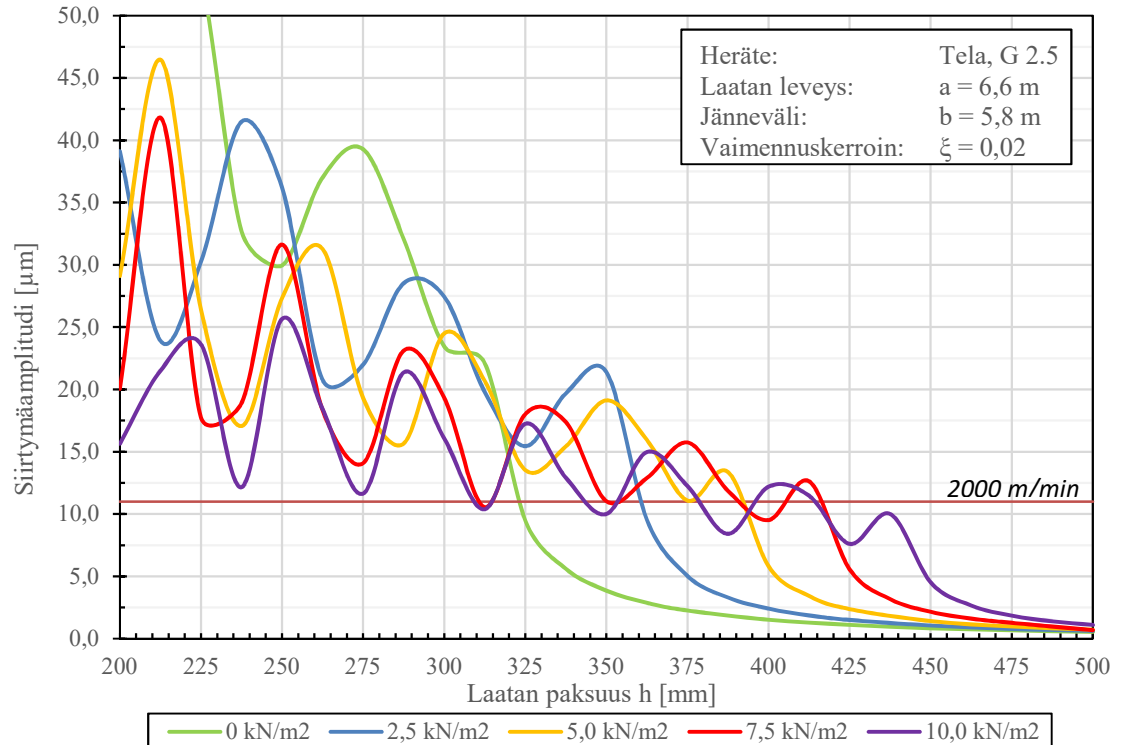


**Kuva 32.** Vakiokorkuisen laatan  $h=200\text{mm}$  keskipisteen siirtymävasteen kuvaaja taajuusalueella 5-30 Hz, Robot.

Kuvaajaan on osoitettu herätteen käyntitaajuuksista resonanssia lähimpänä sijaitseva käyntitaajuus (1300 m/min), jonka kohdalta nähdään siirtymävasteen moninkertaisuus verrattuna aikaisempiin jäykistettyjen laattojen tulokuvaajiin. Vastaava analyysi toteutetaan jälleen kaikille tutkittaville tapauksille, joiden tuloksista piirretty kuvaajat on esitetty kuvissa 33 ja 34. Alimmilla paksuuksilla syntyviä suurimpia siirtymäamplitudeja ei ole näytetty tulosten esityskelpoisuuden parantamiseksi.



**Kuva 33.** Vakiokorkuisen laatan keskipisteen siirtymävaste paksuuden funktiona pysyvän kuorman eri arvoilla tasapainotusluokassa G 6.3



**Kuva 34.** Vakiokorkuisen laatan keskipisteen siirtymävaste paksuuden funktiona pysyvän kuorman eri arvoilla tasapainotusluokassa G 2.5.

Kuvaajista voidaan selvästi lukea ne tapaukset, joissa resonanssi pääsee kehittymään ja asetettu raja-arvo ylittyy moninkertaisesti, jolloin kyseiset suorakaidelaatat eivät ole soveltuvia teollisuusrakennusten välipohjiksi. Itseasiassa lasketut värähtelyn amplitudit ovat joillekin tapauksille niin suuria, että värähtely saattaisi aiheuttaa jopa riskin rakenteen kestävyydelle, puhumattakaan koneille ja ihmisille asetettavista raja-arvoista. Tulos on tietenkin voimassa ainoastaan tälle värähtelysystemille. Yleisesti rakenteiden käyttökelpoisuudesta ei voida näin suppean tutkimuksen perusteella tehdä kattavia johtopäätöksiä, sillä kaikki riippuu käytetystä dynaamisesta herätteestä. Siltikin voidaan havaita, että monet hyvin tyypillisistä staattisen mitoitustilanteen täyttävistä rakenteista kuten vakio-paksuiset 200-250 mm laatat eivät missään tutkituista tapauksista täyttäneet raja-arvoja.

Erityisesti kuvasta 33 selviää, että vertailtaessa eri kuormitustapausten vastefunktioiden muotoa havaitaan niiden olevan toisiaan vastaavia. Jokaisessa tapauksessa näyttää siltä, että kun kuormitusta kasvatetaan  $2,5 \text{ kN/m}^2$ , laatan paksuuden tulisi olla 20-30 mm suurempi, jotta raja-arvot täyttyvät. Suuremmilla kuormilla vaadittu ero paksuuksissa on hie-man matalampi kuin alemmilla. Myös pienemmällä dynaamisella kuormituksella eli telan tasapainotusluokan ollessa G 2.5, voidaan esittää vastaava johtopäätös, vaikka yksittäisillä arvoilla rajat täyttyvät aikaisemminkin. Raja-arvojen toteutuminen aiemmin aiheutuu ainoastaan edelläkin mainitusta ominaistajuuden osumisesta täydellisen resonanssikohdan viereen. Tulosten perusteella voidaan siis todeta, että vakiokorkuisen laatan pysyvän kuormituksen kasvaessa  $2,5 \text{ kN/m}^2$ , tulisi värähtelyn hallitsemiseksi sen paksuutta lisätä 20-30 millimetrillä. Tulos on voimassa ainoastaan tälle tapaukselle, mutta antaa kuitenkin suuntaa siitä, miten rakennetta on muutettava, jos pysyvän kuormituksen arvo kasvaa. Mikäli herätteen taajuus olisi pienempi, vastaava tilanne toteutuisi jo alemmalla taajuusalueella, mutta sama ilmiö voitaisiin silti havaita.

Yleisesti kaikista tämän luvun FRF-analyysin tuloksista pystyttiin havaitsemaan, ettei ominaistajuuden ero herätteeseen tarvitse olla kovin suuri, kun vaste putoaa jo murto-osaan resonanssitilanteesta. Tämä käy ilmi selvästi Robotin siirtymävasteen kuvaajissa nähtävistä resonanssin aiheuttamista piikeistä. Eri rakenteiden käyttökelpoisuuksia arvioidaessa voidaan todeta jäykistettyjen laattarakenteiden olevan huomattavan paljon vakiokorkuisia laattoja sopivampia värähtelyn alaisena. Kahta eri dynaamista kuormaa vertailtaessa nähdään hyvin, että taajuuksien kontrolloinnin lisäksi hyvin olennaista on rajoittaa dynaamisen kuormituksen amplitudin suuruutta, mikäli mahdollista.

## 7. YHTEENVETO JA PÄÄTELMÄT

Tämän diplomityön ensimmäisenä tavoitteena oli esitellä kirjallisuuskatsaukseen perustuen välipohjarakenteiden värähtelymitoitusta antamalla perustiedot yksinkertaisten koneiden aiheuttamien dynaamisten kuormitusten määrittämisestä, rakenteille sallittavan värähtelyjen raja-arvoista sekä värähtelymitoituksen suorittamisesta. Tuloksena syntyi katsaus pyörivien, edestakaisin liikkuvien ja iskevien koneiden aiheuttamien herätteiden sekä rakenteille, ihmisille ja koneille sallittavien värähtelyrajojen määrittämisestä. Näiden perusteella todettiin, että betonirakenteiden välipohjien värähtelymitoitus ei teollisuusrakennuksissa yleensä perustu rakenteen kestävyys tutkimiseen vaan koneiden oikean toiminnan ja tuotannon laatuvaatimusten asettamaan käyttörajatilaan. Taulukossa 10 on esitetty välipohjarakenteen värähtelytarkastelu vaihe vaiheelta. Vaiheet perustuvat tässä työssä käsiteltyihin asioihin ja ne on muodostettu erityisesti teollisuusrakennusten välipohjarakenteiden kannalta. Taulukon viimeisessä sarakkeessa on mainittu, missä työn luovassa käsiteltävää asiaa on tarkemmin esitelty.

**Taulukko 10.** Välipohjan värähtelytarkastelun vaiheet

Mitoitusvaihe	Käsiteltävät asiat	Luvut
1. Selvitä dynaaminen kuormitus	Mitoittavan kuormituksen aiheuttaja <i>koneet / ihmiset / luonnonilmiöt</i>	4.1
	Kuormituksen tyyppi <i>pyörivä / edestakainen / impulssi</i>	
	Kuormituksen ominaisuudet <i>taajuus, amplitudi, sijainti</i>	
2. Selvitä välipohjan ominaisuudet	Ulkomitat ja tuentatapa	3
	Välipohjan tyyppi ja jäykkyys <i>vakiopaksuinen laatta / alapuolelta palkeilla jäykistetty laatta / muu</i>	
	Materiaali- ja vaimennusominaisuudet	
3. Resonanssimitoitus	Laske ominaistuu- <i>likimenetelmät / moodianalyysi</i>	4.2, 5
	Tarkista ero resonanssiin <i>kaikki merkitsevät taajuudet (moodimassa)</i>	

4. Ratkaise aiheutuva vaste (siirtymä, nopeus tai kiihtyvyys)	Värähtelysteemin mallintaminen	4.2, 6
	Vasteen laskenta tietokoneavusteisesti <i>taajuusvastefunktioanalyysi</i> (esim. Autodesk Robot)	
5. Vertaa vastetta raja-arvoihin	Käytettävien raja-arvojen määrittely <i>konevalmistaja / tilaaja / yleiset raja-arvot</i>	4.3
6. Erityismenettelyt	Värähtelyn lisävaimentaminen	(4.2)
	Värähtelyn eristäminen	

Jos resonanssi pääsee kehittymään, tai rakenne ei täytä mitoitusvaiheessa 5 asetettavia raja-arvoja, on sen ominaisuuksia muutettava. Kuten työssä on useaan otteeseen mainittu, käytännössä tämä tarkoittaa rakenteen jäykkyyden ja massan muutosta. Mahdollista on myös turvautua viimeisessä kohdassa mainittuihin erityismenettelyihin. Niitä ei tässä työssä käsitelty kuin pintapuolisesti luvussa 4, mutta ne voivat joissain kohteissa osoittautua hyödyllisiksi apuvälineiksi, mikäli värähtelyä ei rakenteellisilla muutoksilla pystytä riittävästi hallitsemaan.

Työn toisena tavoitteena oli esitellä luvussa 3 käsiteltyjen teollisuusrakennusten yleisimpien teräsbetonivälipohjien ominaistajuuden määrittämistä kahdella eri menetelmällä: värähtelyä käsittelevästä kirjallisuudesta löydettyihin likimenetelmin sekä tietokoneavusteisen laskennan kautta, ja arvioida kummankin menetelmän tulosten yhteensopivuutta. Ominaisajuuden analyysin jälkeen suunnittelijan on helpompi saada aikaan alustava arvio rakenteen värähtelyherkkyydestä ja siitä, vaaditaanko tarkempaa värähtelytarkastelua. Tarkoituksena oli tutkia, antavatko nämä kaksi menetelmää toisiaan vastaavia tuloksia. Tarkastelut suoritettiin suorakaiteen muotoiselle vakiopaksuiselle ja alapuolelta palkeilla jäykistetylle laattarakenteelle laskemalla ominaistajuudet luvussa 5 esitetyin likikaavoin sekä Autodeskin Robot Structural Analysis -elementtimenetelmäohjelman moodianalyysillä muutamalla yleisimmälle tuentatapaukselle. Tulosten välisen virheen rajaksi asetettiin viisi prosenttia, jonka ylittävien tulosten ei voitu katsoa olevan toisiaan vastaavia.

Tarkastelun tuloksena todettiin, että likimenetelmän ja Robot-ohjelman moodianalyysin väliset tulokset olivat toisiaan vastaavia, kun rakenteiden kiinnitysaste oli matala. Esimerkiksi kaikilta reunoiltaan vapaasti tuettujen suorakaiteenmuotoisten laattojen alimmat ominaistajuudet asettuivat kummallakin laskentamenetelmällä lähelle toisiaan. Yleisillä ominaismuodoilla ominaistajuuksien kasvaessa korkeammaksi tulosten välinen virhe lisääntyi. Kun rakenteiden kiinnitysaste kasvoi, alkoivat myös alimmat ominaistajuudet perusominaistajuudesta lähtien erota eri laskentamenetelmillä rajaksi asetettua viittä prosenttia enemmän. Tällainen tulos aiheutui muun muassa kaikilta reunoiltaan

jäykästi tuetulle alapuolelta palkeilla jäykistetylle laatalle. Sen sijaan vakiopaksuiselle laatalle vastaavalla tuennalla alimmat ominaistaajuudet pysyivät vielä virhemarginaalin sisällä. Huomioitavaa on, että jäykistetylle rakenteelle perusominaistaajuus tällä tuentatavalla oli suuruusluokassa 100 Hz, kun vakiopaksuiselle laatalle se oli noin 50 Hz. Sama toistui myös muilla tuentatapauksilla, jossa perusominaistaajuus oli suuruusluokkaa 100 Hz, joten virheen voitiin nähdä aiheutuvan, kun perusominaistaajuus oli korkea. Tällä ei ole kovin suurta käytännön merkitystä, sillä sekä likikaavoilla että tietokoneavusteisella laskennalla nähtiin näissä virhemarginaalin ylittävissä tapauksissa rakenteiden ominaistaajuuksien olevan korkeita, jolloin niitä ei tavallisesti teollisuudessa esiintyvien dynaamisten kuormitusten vaikutuksesta saada herätettyä. Tämän työn perusteella on mahdollista todeta, aiheutuiko tulosten välinen ero moodianalyysin, laskentakaavan vai kenties molempien vaikutuksesta. Työn perusteella voidaan kuitenkin todeta, että värähtelyherkkien eli matalien perusominaistaajuuksien laattojen ominaistaajuuden arviointiin soveltuvat sekä työssä esitellyt likimenetelmät että elementtimenetelmään pohjautuva tietokoneavusteinen moodianalyysi.

Diplomityössä tutkittiin lisäksi teollisuusrakennusten paikallavalettujen teräsbetonirakenteiden välipohjien reagointia dynaamiseen kuormitukseen. Dynaamisena kuormituksena käytettiin erään paperikoneen kuivatusosan huovan telaa, jolla on pienen halkaisijansa vuoksi suuri pyörimisnopeus ja näin ollen suuri kulmataajuus. Taajuuksia tutkittiin koneen useilla käyntinopeuksilla, jolloin herätteen taajuudet saivat arvot välillä 10,5-26,3 Hz. Luvun 5 tulokset osoittivat, että paikallavalettujen massiivisten välipohjarakenteiden alimmat ominaistaajuudet tulivat tutkituilla rakenteilla ja ulkomitoilla melko korkeiksi, joten suuritaajuisen herätteen käyttö rakenneanalyysissä oli perusteltua.

Päätavoitteena oli näyttää, minkälainen vaikutus rakenteen ominaisuuksien muutoksilla on sen käyttökelpoisuuteen teollisuusrakennuksissa kyseisen herätteen vaikuttaessa. Käytännössä rakennesuunnittelijan on mahdollista etenkin olemassa olevien rakenteiden yhteydessä suunnitella muutoksia rakenteen ominaisuuksista vain sen massa- ja jäykyyteen. Tämä tapahtuu yleensä joko lisäämällä rakenteelle pysyvää kuormaa, jolloin ainoastaan rakenteen massa kasvaa, tai kasvattamalla välipohjan paksuutta, jolloin sekä massa että jäykkyys kasvavat, joten näiden muutosten vaikutusta analysoitiin. Rakenteen keskipisteen siirtymäaste selvitettiin elementtimenetelmään perustuen Robot- ohjelman FRF-analyysillä jokaiselle tutkitulle tapaukselle ja tulokset piirrettiin kuvaajiin.

Aluksi tutkittiin kuormituksen lisäystä edellä mainituille yleisimmille teräsbetonisille laattarakenteille. Kuormituksen lisäys voi vahvistamismenetelmänä tulla kysymykseen toteuttamalla olevan rakenteen päälle niin kutsuttu kelluva rakenne, jossa lisättävä massa erotetaan alkuperäisestä esimerkiksi väliin jätettävän eristekaistan avulla. Jäykistetyin laatan tapauksessa rakenne oli alun perin yläviritteinen, joten kuormanlisäyksellä oli käyttökelpoisuuden kannalta epäedullisia vaikutuksia ominaistaajuuksien siirtyessä herätteen taajuusalueelle. Vakiopaksuinen laatta taas sijaitsi jo alkutilanteessa herätteen taajuusalueella, mutta tutkituista kuormanlisäyksistä suurimmatkaan eivät olleet riittäviä

muuttamaan rakennetta alaviritteiseksi. Raja-arvot täyttävää lopputulosta ei saavutettu, sillä resonanssi pääsi kehittymään jollakin koneen alemmista käyntinopeuksista ominaistaajuuksien laskiessa. Näin ollen tuloksen perusteella voitiin todeta, että ainakaan niissä tapauksissa, joissa herätteen taajuusjakauma on suuri ja rakenteen ominaistaajuus sijaitsee kyseisen taajuusjakauman yläpäässä tai kokonaan yläpuolella, ei massan lisäyksellä saavuteta hyödyllisiä vaikutuksia.

Laattarakenteiden korkeuksien kasvattamista tutkittiin eri kuormitustapauksille välillä 0-10 kN/m<sup>2</sup>. Jäykistetyille laatalle tämä toteutettiin kahdella eri tapaa, sillä palkkien yläpuolisen laatan korkeutta on luonnollisesti mahdollista kasvattaa joko ylöspäin tai alaspäin. Tuloksista havaittiin, että mikäli rakenteen kokonaiskorkeuden kasvattaminen ei aiheuta tilahtausta, on tehokkaampi menetelmä jäykistettyjen laattojen värähtelyongelmien hallintaan palkkien yläpuolisen laatan korkeuden kasvattaminen ylöspäin, jolloin koko rakenteen korkeus kasvoi. Alaspäin kansilaatan korkeutta kasvatettaessa pienenevät jäykistepalkkien korkeudet, jolloin alimmat ominaistaajuudet säilyivät lähes toisiaan vastaavana, vaikka laatan paksuus muuttui. Taajuuksia ei näin ollen saatu siirrettyä kauemmas herätteen taajuuksista. Vasteet kuitenkin pienenevät rakenteen jäykkyyden kasvamisen vaikutuksesta, vaikka oltiinkin resonanssialueella. Mitoittavaa taajuusaluetta laatan korkeuden kasvattaminen alaspäin kuitenkin pienensi ylempien mitoittavien ominaistaajuuksien siirtyessä kauemmaksi perusominaistaajuudesta, mitä ei tapahtunut laattojen korkeutta ylöspäin kasvatettaessa.

Vakiopaksuisen laatan korkeuden lisäämisen yhteydessä huomattiin, että ohuimmilla tutkituilla rakenteilla vaste kehittyi hyvin suureksi, jopa sellaiseksi, että rakenne saattaisi vaurioitua. Vertailtaessa laskettujen kuormitustapausten (0-10 kN/m<sup>2</sup>) vastefunktioita, havaittiin niiden olevan muodoiltaan toisiaan vastaavia. Tämä osoitti, että tutkitulla rakennesysteemillä kuormituksen kasvattaminen 2,5 kN/m<sup>2</sup>:lla vaati 20-30 millimetriä paksuuden laatan, jotta rakenteen värähtely pysyi hyväksyttävällä tasolla. Päätelmä on sellaisenaan soveltuva ainoastaan tutkittua tapausta vastaavalle rakenteelle, mutta se antaa suuntaa siitä, miten rakennetta on muutettava, jos pysyvä kuorma kasvaa.

Luvun 6 tuloksista voitiin tehdä muutamia yleisiä johtopäätöksiä. Havaittiin, että tutkituille toiseen suuntaan jäykistetyille rakenteille haitallinen taajuusalue oli hyvin laaja johtuen hallitsevien ominaismuotojen lähekkäisyydestä, jolloin suurimmat siirtymävasteet eivät välttämättä toteutuneet rakenteen alimmalla ominaistaajuudella. Tällöin ei voida suoraan pelkästään alimmalla ominaistaajuudella tapahtuvaa siirtymävastetta tutkimalla olettaa, että värähtelyongelmia ei tule esiintymään. Näin ollen tämän diplomityön perusteella voitiin todeta, että jäykistetyille rakenteille ylävirittäminen on tehokkaampi keino välttää värähtelyongelmat, sillä massan lisäyksellä toteutettava rakenteen alavirittäminen vaatisi koko mitoittavan taajuusalueen siirtämistä herätteen taajuusjakauman alapuolelle, minkä aikaansaaminen voi olla vaikeaa. Rakenteen alavirittäminen voisi tulla kysymykseen ainoastaan, kun jäykistetyn rakenteen yläpuolisen laatan paksuutta kasvatetaan alaspäin. Tässä tapauksessa tilanne alkaa muistuttavaa enemmän vakiopaksuista laatta, jolle

alavirittäminen ei tulosten perusteella ole mahdotonta, sillä vakiopaksuiselle laatalle mitoittava taajuusalue on huomattavasti pienempi, koska alin ominaistaajuus usein ainoa, joka joudutaan tarkastelemaan ja korkeammat merkitsevät taajuudet hyvin kaukana perusominaistaajuudesta.

Tutkittaessa kahta herätteen eri tasapainotusluokkaa selvisi myös, että mikäli dynaamisen kuormituksen maksimiamplitudi on pieni, voivat raja-arvot täytyä resonanssissakin, ja toisaalta, mikäli kuormituksen maksimiamplitudi on hyvin suuri, voi värähtely aiheuttaa ongelmia, vaikka oltaisiin kaukana resonanssitaajuuksista. Tämän vuoksi on laattarakenteiden värähtelymitoituksessa selvitettävä sekä ominaistaajuudet että aiheutuvat dynaamiset vasteet. Tulokset osoittivat lisäksi, että monet hyvin yleiset staattisen mitoitustilanteen määräämät välipohjarakenteet eivät tutkitussa dynaamisessa tilanteessa olleet soveltuvia. Näin oli esimerkiksi 200-250 mm korkeiden tasapaksujen laattojen tapauksessa, jotka ovat hyvin tavallisia välipohjarakenteita. Ne eivät missään kuormitustilanteessa täyttäneet värähtelylle asetettuja raja-arvoja, mutta niiden soveltuvuuden määrittävät kuitenkin lopulta herätteen ominaisuudet.

Edellä tehdyt johtopäätökset rakenteiden ominaisuuksien vaikutuksista niiden soveltuvuuteen antavat suuntaa välipohjien värähtelysuunnitteluun, mutta kaiken kattavia yleistyksiä ei niiden perusteella voida tehdä, sillä rakenteen värähtely riippuu aina vaikuttavasti herätteestä ja sen luonteesta, rakenteen tuentatavasta ja dimensioista sekä sen materiaali- ja vaimennusominaisuuksista. Siirtymävasteen analysointi toteutettiin ainoastaan neljältä reunalta vapaasti tuetulle rakenteelle, mikä ei välttämättä vastaa rakenteen todellista kiinnitysastetta. Laattarakenteita käsiteltiin lisäksi vain yhdeltä pilariväliltä yksiaukkoisina rakenteina, vaikka todellisuudessa useat välipohjat jatkuvat moniaukkoisina ja yhtenäisinä useille pilariväleille. Myöskään betonirakenteiden halkeilua ei ole työssä huomioitu, vaikka sen tiedetään alentavan rakenteiden jäykkyyksiä ja toisaalta parantavan vaimennusominaisuuksia. Työssä herätteenä käytettiin ainoastaan jaksollista harmonista herätettä, mutta esimerkiksi iskevien koneiden tuottamille impulssiheräteille tulokset saattavat olla hyvin erilaisia. Impulssiherätteen vaikuttaessa rakennetta ei voitaisi enää analysoida harmonisella analyysillä kuormituksen luonteen erilaisuuden takia, joten sen tutkiminen vaatisi tarkempaa perehtymistä rakenteiden reagointiin kyseisille kuormituksille ja sen analysointitapoihin.

Työssä ei tutkittu tarkemmin värähtelyn eristämistä tai värähtelyä absorboivia ja kumoavia rakenteita, vaan tyydyttiin ainoastaan toteamaan, että mikäli värähtelyä ei massan ja jäykkyyden muutoksilla saada haltuun, voivat värähtelyn eristäminen tai absorboivien rakenteiden lisääminen tarjota ratkaisun ongelmiin. Yhden vapausasteen värähtelyn teorian yhteydessä havaittiin, että rakenteen vaimennuksella oli suuri vaikutus sen vahvistuskertoimeen, joten värähtelyn amplitudien hallinta onnistuisi vaimennuksen kasvattamisella. Todellisuudessa rakenteen vaimennus on todennäköisesti työssä käytettyä suurempaa, mutta ilmiön monimutkaisuuden vuoksi työssä käytettiin melko konservatiivista vaimennuksen arvoja.



Jatkotutkimuksena ja -toimenpiteinä tämän diplomityön pohjalta olisi toteutettavissa laskentapohja ominaistajuuksien arvioimiseen. Koska luvun 5 tuloksista oli mahdotonta sanoa, aiheutuivatko muutamissa tutkituissa tapauksissa esiintyneet virhemarginaalin ylittävät tulokset tutkitusta likimenetelmästä, käytetystä laskentaohjelmasta vai molemmista, voitaisiin tulokset todentaa toisella laskentaohjelmistolla tai mittauksin oikeasta rakenteesta. Vasteen analyysissä olisi tarpeellista tutkia lisäksi alapuolelta palkeilta jäykistetyin laattarakenteen mallinnustavan vaikutusta, sillä nyt laattarakenne oli mallinnettu niin kutsuttuna luonnollisesti ortotrooppisena rakenteena, jossa jäykistetty laattarakenne muunnettiin vastaavaksi vakiopaksuiseksi laataksi. Toinen vaihtoehto olisi tutkia rakennetta mallintamalla jäykisteet diskreetteinä rakenneosina ja lisäksi selvittää muiden liittyvien rakenneosien eli esimerkiksi primääripalkkien ja pilareiden vaikutus rakenteen ominaistajuuksiin, toisin sanoen tutkia rakennejärjestelmää kokonaisuutena.

Työn perusteella ei siis pystytty suoraan sanomaan, millaiset laattarakenteet ovat värähtelyn esiintyessä soveltuvia teollisuusrakennusten välipohjiksi ja millaiset eivät johtuen värähtelyilmiön monimutkaisuudesta. Työ antaa kuitenkin yleiskuvan teollisuusrakennusten välipohjarakenteiden värähtelyn hallinnasta sekä mitoitusprosessista, ja sen perusteella suunnittelijan on mahdollista päästä kiinni tarkemmin värähtelyn aiheuttamaan ongelmaan, kun menetelmät yksinkertaisten dynaamisten kuormien sekä värähtelyrajojen arvioimiseen ovat tiedossa. Luvun 6 tulokset antavat lisäksi osviittaa siitä, millaiset laattarakenteet yleisemmin soveltuvat teollisuusrakennuksissa käytettäväksi.

## LÄHTEET

- [1] SFS-EN 1992-1-1, Eurokoodi 2, Betonirakenteiden suunnittelu. Osa 1-1: Yleiset säännöt ja rakennuksia koskevat säännöt, Suomen Standarditoimistoliitto, Helsinki, 2005, 221 p.
- [2] SFS-EN 1990-1-1, Eurokoodi. Rakenteiden suunnitteluperusteet, Suomen Standarditoimistoliitto, Helsinki, 2006, 185 p.
- [3] H. Bachmann, W. Ammann, Vibrations in Structures, IABSE - AIPC - IVBH, Zürich, Switzerland, 1987, 176 p.
- [4] A.L. Smith, S.J. Hicks, P.J. Devine, Design of Floors for Vibration: A New Approach, The Steel Construction Institute, 2009
- [5] T. Salmi, S. Virtanen, Dynamiikka, Pressus Oy, Tampere, 2006, 480 p.
- [6] J.W. Smith, Vibrations of Structures: Applications in civil engineering design, Chapman and Hall, London, 1988, 338 p.
- [7] S. Prakash, V.K. Puri, Foundations for Machines: Analysis and Design, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988, 656 p.
- [8] Insinöörijärjestöjen koulutuskeskus, Koneiden perustusten suunnittelu, Julkaisu 23-69, Helsinki, 1969
- [9] A. Talja, VTT Rakennustekniikka, Teräsrunkoisten välipohjien värähtelyn hallinta, Valtion teknillinen tutkimuskeskus, Espoo, 1996, 62 p.
- [10] M. Laavola, Kevyiden välipohjien värähtelyt, diplomityö, Tampereen teknillinen korkeakoulu, Tampere, 1990, 92+31 p.
- [11] V. Jurvansuu, Massiivisten välipohjien värähtelyt, diplomityö, Tampereen teknillinen yliopisto, Tampere, 2009, 81+12 p.
- [12] A. Talja, T. Toratti, E. Järvinen, Lattioiden värähtelyt. Suunnittelu ja kokeellinen arviointi, VTT, Espoo, 2002, 50 p.
- [13] E. Pennala, Koneiden ja rakenteiden värähtelyt, Otatieto, Helsinki, 1999, 314 p.
- [14] M. Lanu, Betonirakenteiden värähtelyt, VTT tiedotteita 699, Valtion teknillinen tutkimuskeskus, Espoo, 1987, 48 p.
- [15] A.K. Chopra, Dynamics of Structures. Theory and Applications to Earthquake Engineering, 4th ed. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2012, 944 p.

- [16] M. Tuomala, Rakenteiden mekaniikan jatkokurssin luentomoniste, Tampereen teknillinen yliopisto, 229 p.
- [17] R.D. Blevins, Formulas for Dynamics, Acoustics and Vibration, John Wiley & Sons Ltd, 2016, 644 p.
- [18] M. Géradin, D. Rixen, Mechanical Vibrations: Theory and Application to Structural Dynamics, 2nd ed. John Wiley & Sons Ltd, 1997, 411 p.
- [19] RT 82-10821, Betonielementtirunkorakenteet, ohjetiedosto, Rakennustieto Oy, 2004, pp. 11-13
- [20] M.S. Troitsky, Stiffened plates: Bending, Stability and Vibrations, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, 1976, 410 p.
- [21] J.K. Wright, J.G. MacGregor, Reinforced concrete: Mechanics & Design, 6th ed. Pearson Education Inc., Upper Saddle River, New Jersey, 2012, pp. 634-635
- [22] S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, 2nd ed. McGraw-Hill Book Company, Inc., 1959, pp. 364-369
- [23] P. Johansson, Vibration of Hollow Core Concrete Elements Induced by Walking, Master Thesis, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, 2009, 105+52p.
- [24] H. Koukkari, Betonirakenteiden dynaamiset kuormituskokeet laboratoriossa, VTT tiedotteita 784, Valtion teknillinen tutkimuskeskus, Espoo, 1987, 43+7 p.
- [25] H. Sinisalo, Betonirakenteiden suunnittelun erikoiskurssi V, Teema III: Dynaamisesti rasitettujen perustusten suunnittelu, Suomen Betoniyhdistys ry, RIL, Helsinki, 1988, pp. 126-167
- [26] American Concrete Institute, ACI351.3R-04: Foundations for Dynamic Equipment, 2004, 63 p.
- [27] PSK Standardisointi, PSK 5707, Kunnanvalvonnan värähtelymittaus. Vianmääritys, 5. painos ed. PSK Standardisointiyhdistys ry, 2011, 34 p.
- [28] SFS-EN 1991-3, Eurokoodi 1: Rakenteiden kuormat. Osa 3: Nostureista ja muista koneista aiheutuvat kuormat, 2nd ed. Suomen standarditoimistoliitto, 2007, 67+6 p.
- [29] SFS-ISO 21940-11:2017, Mechanical vibration. Rotor balancing. Part 11: Procedures and tolerances for rotors with rigid behaviour, Suomen Standarditoimistoliitto, Helsinki, 2017, 29 p.
- [30] M. Paz, Structural Dynamics, Theory and computation, 3rd ed. Chapman & Hall, New York, 1991, 568-572 p.

- [31] S. Arya, M. O'Neill, G. Pincus, Design of Structures and Foundations for Vibrating Machines, Gulf Publishing Company, Houston, Texas, 1979, pp. 52-56
- [32] SFS-ISO 20816-1:2017, Mechanical vibration. Measurement and evaluation of machine vibration . Part 1: General guidelines, Suomen Standarditoimistoliitto, Helsinki, 2017, 39 p.
- [33] M.Mikkola, Levyjen, laattojen ja kuorien teoriaa, Otakustantamo, 1986, s. 94-98
- [34] S. Ohlsson, Springiness and human-induced floor vibrations. A design guide, Swedish Council for Building Research, 1988, .
- [35] Autodesk Help Modal Analysis Assumptions, saatavissa: (viitattu 23.6.2019) <https://knowledge.autodesk.com/support/robot-structural-analysis-products/learn-explore/caas/CloudHelp/cloudhelp/2017/ENU/RSAPRO-UsersGuide/files/GUID-3400C9A4-F47F-4A7F-9B67-66BEE7B9105A-htm.html>.
- [36] T. Salmi, Rakenteiden dynamiikka, luentomoniste, Tampereen teknillinen yliopisto, Tampere, 2003, pp. 111-114
- [37] Autodesk Help Harmonic (FRF) Analysis Description, Saatavissa: (viitattu 23.4.2019) <https://knowledge.autodesk.com/support/robot-structural-analysis-products/learn-explore/caas/CloudHelp/cloudhelp/2015/ENU/Robot/files/GUID-3D371D3A-74FE-48A2-8683-5DD8638D0435-htm.html>.
- [38] M. Karvinen, Koneperustukset, Julkaisu 6-83, Paperikoneen värähtelyominaisuudet ja voimavaikutukset, Insinöörijärjestöjen koulutuskeskus, Helsinki, 1983, 15 p.
- [39] R. Slizard, Theory and Analysis of Plates, Classical and Numerical Methods, 1st ed. Prentice-Hall, 1973, 724 p.
- [40] A.W. Leissa, Vibration of plates, Scientific and Technical Information Division, National Aeronautics and Space Administration (NASA), 1969, 353 p.

## LIITE 1: OMINAISTAAJUudet MUILLE REUNAEHDOILLE

**Taulukko 1.** Kahdelta vastakkaiselta reunalta vapaa ja kahdelta reunalta vapaasti tuettu isotrooppinen laatta.

Muoto	Puoliaallot		Ominaistaajuus $f_{ij}$ [Hz]		Ero [%]	Moodimassa [%]
	$i$	$j$	Kaava (65)	Robot		
<u>1</u>	1	1	15,00	14,78	1,4	<u>80,80</u>
2	1	2	25,53	22,79	10,7	0,00
<u>3</u>	1	3	46,58	46,58	0,0	<u>0,08</u>
4	2	1	59,98	58,65	2,2	0,00
5	2	2	72,83	67,70	7,0	0,00
6	1	4	91,69	89,72	2,2	0,00
7	2	3	96,47	94,54	2,0	0,00
<u>8</u>	3	1	134,96	129,60	4,0	<u>8,83</u>
9	3	2	148,50	138,43	6,8	0,00
10	2	4	143,57	138,53	3,5	0,00

**Taulukko 2.** Kahdelta vastakkaiselta reunalta vapaa ja kahdelta reunalta vapaasti tuettu jäykistetty laatta.

Muoto	Puoliaallot		Ominaistaajuus $f_{ij}$ [Hz]		Ero [%]	Moodimassa [%]
	$i$	$j$	Kaava (67)	Robot		
<u>1</u>	1	1	45,05	44,03	2,3	<u>80,89</u>
2	1	2	45,41	44,25	2,6	0,00
<u>3</u>	1	3	46,05	45,52	1,1	<u>0,07</u>
4	1	4	49,70	49,98	-0,6	0,00
5	1	5	60,08	60,56	-0,8	0,00
6	1	6	79,01	78,79	0,3	0,00
7	1	7	106,46	104,51	1,8	0,00
8	1	8	141,72	136,97	3,4	0,00
9	2	1	180,21	162,68	9,7	0,00
10	2	2	180,57	162,82	9,8	0,00

**Taulukko 3.** Kahdelta vastakkaiselta reunalta vapaa ja kahdelta reunalta jäykästi tuettu isotrooppinen laatta.

Muoto	Puoliaallot		Ominaistaajuus $f_{ij}$ [Hz]		Ero [%]	Moodimassa [%]
	$i$	$j$	Kaava (65)	Robot		
<u>1</u>	1	1	34,009	33,26	2,2	<u>69,21</u>
2	1	2	41,100	38,49	6,4	0,00
<u>3</u>	1	3	58,414	57,75	1,1	<u>0,07</u>
4	2	1	93,719	89,74	4,2	0,00
5	1	4	97,902	97,23	0,7	0,00
6	2	2	103,783	96,80	6,7	0,00
7	2	3	123,762	119,3	3,6	0,00
8	2	4	161,021	158,52	1,6	0,00
<u>9</u>	1	5	163,402	158,56	3,0	<u>0,01</u>
<u>10</u>	3	1	183,688	171,25	6,8	<u>13,59</u>

**Taulukko 4.** Kahdelta vastakkaiselta reunalta vapaa ja kahdelta reunalta jäykästi tuettu jäykistetty laatta.

Muoto	Puoliaallot		Ominaistaajuus $f_{ij}$ [Hz]		Ero [%]	Moodimassa [%]
	$i$	$j$	Kaava (67)	Robot		
<u>1</u>	1	1	102,18	89,99	11,9	<u>71,90</u>
2	1	2	102,38	90,06	12,0	0,00
<u>3</u>	1	3	102,67	90,58	11,8	<u>0,11</u>
4	1	4	104,37	92,71	11,5	0,00
5	1	5	109,72	98,58	11,0	0,00
6	1	6	121,16	110,47	10,2	0,00
7	1	7	140,63	129,82	9,3	0,00
8	1	8	168,92	156,90	8,8	0,00
9	1	9	205,91	191,23	8,7	0,00
10	2	1	281,59	219,11	22,2	0,00

**Taulukko 5.** Kahdelta vastakkaiselta reunalta jäykästi ja kahdelta vapaasti tuettu isotrooppinen laatta.

Muoto	Puoliaallot		Ominaistaajuus $f_{ij}$ [Hz]		Ero [%]	Moodimassa [%]
	$i$	$j$	Kaava (65)	Robot		
<u>1</u>	1	1	41,52	40,37	2,8	<u>56,81</u>
2	1	2	70,96	68,24	3,8	0,00
3	2	1	102,64	97,99	4,5	0,00
<u>4</u>	1	3	126,17	120,04	4,9	<u>6,37</u>
5	2	2	131,91	124,28	5,8	0,00
6	2	3	184,94	171,78	7,1	0,00
<u>7</u>	3	1	193,28	179,82	7,0	<u>10,71</u>
8	1	4	205,96	192,85	6,4	0,00
9	3	2	223,17	205,27	8,0	0,00
10	2	4	262,67	240,08	8,6	0,00

**Taulukko 6.** Kahdelta vastakkaiselta reunalta jäykästi ja kahdelta vapaasti tuettu jäykistetty laatta.

Muoto	Puoliaallot		Ominaistaajuus $f_{ij}$ [Hz]		Ero [%]	Moodimassa [%]
	$i$	$j$	Kaava (67)	Robot		
<u>1</u>	1	1	102,39	90,13	12,0	<u>58,27</u>
2	2	1	103,59	91,15	12,0	0,00
<u>3</u>	3	1	107,45	94,79	11,8	<u>6,42</u>
4	4	1	116,31	103,42	11,1	0,00
<u>5</u>	5	1	132,36	119,04	10,1	<u>2,28</u>
6	6	1	156,87	142,48	9,2	0,00
<u>7</u>	7	1	190,03	173,57	8,7	<u>1,15</u>
8	8	1	231,51	211,63	8,6	0,00
9	1	2	281,89	219,20	22,2	0,00
10	2	2	282,73	219,70	22,3	0,00